THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

Jean LEMAITRE

1ère THÈSE : Sur la détermination des lois de comportement des matériaux élasto-visco-plastiques.

2e THÈSE : Proposition donnée par la Faculté :
La réponse des systèmes non linéaires aux excitations aléatoires.
(Mise au point bibliographique)

Soutenues le 13 Mai 1971 devant la Commission d'examen.

MM. J. FRIEDEL Président

R. MAZET
R. SIESTRUNCK
G. COUPRY
} Examinateurs.

O.N.E.R.A.
29, Avenue de la Division Leclerc,
92 CHATILLON
1971

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

Jean LEMAITRE

1ère THÈSE : Sur la détermination des lois de comportement des matériaux élasto-visco-plastiques.

2e THÈSE : Proposition donnée par la Faculté :
La réponse des systèmes non linéaires aux excitations aléatoires.
(Mise au point bibliographique)

Soutenues le 13 Mai 1971 devant la Commission d'examen.

MM. J. FRIEDEL Président

R. MAZET
R. SIESTRUNCK } Examinateurs.
G. COUPRY

O.N.E.R.A.
29, Avenue de la Division Leclerc,
92 CHATILLON
1971

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

AVANT PROPOS

Le premier symposium sur le fluage dans les structures a eu lieu en 1960, le second en 1970. Cette période coïncide approximativement avec la durée d'une action, sur ce thème, entreprise par le Professeur R. MAZET à la Direction Résistance des Structures de l'O.N.E.R.A.. A la lumière de ces deux manifestations, il est possible d'évaluer les progrès réalisés durant cette décennie. Ils sont dus, essentiellement, à l'application, à la mécanique des solides, de concepts issus de la physique des solides et de la thermodynamique et à la possibilité de traiter, à l'aide d'ordinateurs, par des méthodes de calcul adaptées, les problèmes fortement non-linéaires de viscoplasticité. Les travaux entrepris à l'O.N.E.R.A. ont été orientés dans les deux directions correspondantes : lois de comportement et méthodes de calcul.

La présente thèse représente une partie des résultats acquis sous le patronnage du Professeur MAZET que je me dois de remercier, à titre personnel, pour la stimulation constante qu'il a imprimée aux recherches et pour la collaboration qui a pu s'établir avec le laboratoire de Mécanique des Solides de la Faculté des Sciences d'Orsay. Un certain nombre d'idées de base sont nées au cours de discussions avec le Professeur N.J. HOFF qui avait accepté en 1964 d'être Conseiller à l'O.N.E.R.A. Je lui exprime ici toute ma gratitude.

L'équipe chargée, à l'O.N.E.R.A., du fluage dans les structures était dirigée par Roger VALID, Chef de Division, qui a su animer les recherches avec une compétence, un dévouement et une gentillesse, dont seuls ceux qui l'ont côtoyé journellement connaissent l'étendue. Grâce à lui, cette équipe de théoriciens, d'expérimentateurs, de stagiaires était une équipe d'amis travaillant dans un même esprit et avec une foi qui seule a permis de triompher des difficultés de toutes sortes. Dans ces conditions, la présentation d'un travail « personnel » pour une thèse était une tâche délicate car il n'était pas toujours facile de séparer les idées personnelles de la contribution de chacun, contribution qui s'est constamment traduite par des conseils, des critiques, des calculs, des réalisations et des expériences ; R. VALID, de plus, a bien voulu relire et corriger le manuscrit initial ; à lui, à tous, j'exprime ma profonde reconnaissance.

Je tiens à remercier l'O.N.E.R.A., en la personne du Professeur R. CASTAING, d'avoir permis l'existence de cette thèse et enfin les membres du jury d'avoir bien voulu témoigner de l'intérêt pour ce travail : le Professeur J. FRIEDEL qui a accepté de présider le jury, le Professeur R. MAZET, le Professeur R. SIESTRUNCK qui m'a initialement orienté vers la mécanique, et le Docteur G. COUPRY.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543511_0036

TABLE DES MATIÈRES

Pages

RÉSUMÉ ____ 3

LISTE DES PRINCIPALES NOTATIONS UTILISÉES ____ 4

Chapitre I - ÉTUDES ET CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES ____ 7

I,1. Buts ____ 7
I,2. Généralités sur les méthodes de calcul des structures ____ 8
I,3. Les paramètres d'état ____ 9
I,3.1. *Résultats de physique des solides* ____ 9
I,3.2. *Résultats de thermodynamique des milieux continus* ____ 11
I,3.3. *La méthode globale* ____ 12

Chapitre II - LOIS UNIDIMENSIONNELLES ____ 15

II,1. Définition de l'état unidimensionnel ____ 15
II,2. Existence d'une loi mécanique d'état ____ 16
II,2.1. *Cas des matériaux stables* ____ 16
II,2.1.1. Cas isotherme quasi-statique sans retour en arrière ____ 16
II,2.1.2. Problème des retours en arrière ____ 26
II,2.1.3. Cas des charges rapidement variables ____ 29
II,2.1.4. Problème de la température ____ 31
II,2.2. *Cas des matériaux non stables* ____ 34
II,3. Détermination expérimentale des grandeurs caractéristiques ____ 36
II,3.1. *Intérêt particulier des essais de relaxation* ____ 36
II,3.2. *Mesure des différents paramètres* ____ 43
II,3.3. *Obtention des fonctions et coefficients caractéristiques* ____ 45
II,4. Utilisation de la loi proposée ____ 47
II,5. Applications particulières ____ 49
II,5.1. *Domaine d'élasticité, domaine de plasticité* ____ 49
II,5.2. *Amortissement interne des matériaux* ____ 53
II,5.3. *Problème de la durée de vie* ____ 57
II,5.4. *Calcul des poutres en fluage* ____ 58

Chapitre III - LOIS TRIDIMENSIONNELLES ____ 61

III,1. Extension des résultats unidimensionnels au cas tridimensionnel ____ 61
III,1.1. *Hypothèses* ____ 61
III,1.2. *Théorie de l'élasto-visco-plasticité isotherme* ____ 62
III,1.3. *Détermination de la fonction d'état* ____ 64
III,1.4. *Existence et unicité des solutions* ____ 65
III,2. Cas particuliers ____ 66
III,2.1. *Elasticité* ____ 66
III,2.2. *Plasticité* ____ 66
III,2.3. *Fluage établi* ____ 67
III,2.4. *Trajet de chargement simple* ____ 67
III,2.4.1. Intégration de la loi d'élasto-visco-plasticité ____ 67
III, 2.4.2. Théorème d'existence du chargement simple ____ 69
III,3. Méthode de calcul associée ____ 72
III,4. Application au calcul d'un cylindre soumis à un chargement complexe variable ____ 73
III,4.1 *Mise en équation du problème* ____ 73
III,4.2. *Méthode de calcul* ____ 77
III,4.3. *Application particulière* ____ 84
III,4.4. *Confrontation théorie-expérience, discussion* ____ 87

Chapitre IV - DÉVELOPPEMENT DE MÉTHODES D'ESSAIS 95

IV,1. Méthode de mesure de la déformation dans l'essai en traction simple 95

IV,1.1. *Principe de la méthode - procédure* 95

IV,1.2. *Extension au cas tridimensionnel* 100

IV,2. Méthode de mesure des caractéristiques statiques d'élasticité linéaire 102

IV,2.1. *Module d'Young* 102

IV,2.2. *Coefficient de Poisson* 105

IV,3. Procédure pratique d'obtention des caractéristiques visco-plastiques isothermes 107

IV,3.1. *Méthode rapide approchée (l'essai d'écrouissage-relaxation)* 108

IV,3.2. *Caractéristique précise de viscosité* 111

IV,3.3. *Caractéristique précise d'écrouissage* 112

IV,3.4. *Détermination des fonctions et coefficients caractéristiques* 113

IV,4. Méthode d'obtention des caractéristiques de fluage à long terme à partir d'essais de relaxation de courte durée 115

IV,4.1. *Généralités sur les méthodes d'extrapolation classiques* 115

IV,4.2. *Obtention directe des courbes de fluage à partir des résultats d'expériences de relaxation* 117

IV,4.3. *Intérêt de la méthode, gain de temps* 119

IV,4.4. *Résultats* 120

Chapitre V - CRÉATION DE MOYENS D'EXPÉRIMENTATION 123

V,1. Appareil de mesure directe des déformations permanentes 124

V,1,1. *Fonctions réalisées* 124

V,1.2. *Caractéristiques* 125

V,1.3. *Applications* 126

V,2. Appareil à relaxation multiple 126

V,2.1. *Principe* 127

V,2.2. *Description* 128

V,2.3. *Mesures* 128

V,2.4. *Problèmes particuliers* 129

V,2.5. *Caractéristiques* 131

V,3. Appareil à fluage 132

V,3.1. *Principe* 132

V,3.2. *Description* 132

V,3.3. *Caractéristiques* 134

V,4. Machine d'essais en traction-torsion-compression 134

V,4.1. *Description* 135

V,4.2. *Equipements* 136

V,4.3. *Caractéristiques, précisions* 136

Chapitre VI - CONCLUSIONS ET DÉVELOPPEMENTS 138

VI,1. La connaissance des programmes de chargement 138

VI,2. L'élaboration des matériaux 138

VI,3. Les méthodes de calcul 138

VI,4. La détermination des caractéristiques des matériaux 139

VI,5. La forme des lois de comportement 139

RÉFÉRENCES 141

SUR LA DÉTERMINATION DES LOIS DE COMPORTEMENT DES MATÉRIAUX ÉLASTO-VISCO-PLASTIQUES

par Jean LEMAITRE

RÉSUMÉ

Des considérations de physique des solides et de thermodynamique des milieux continus permettent, par la méthode globale, de justifier et de généraliser des types de lois unidimensionnelles, proposées à l'origine pour rendre compte du fluage strict sous charge constante. Une loi mécanique d'état visco-plastique isotherme, reliant la contrainte, la déformation visco-plastique et sa vitesse, est proposée et vérifiée pour les matériaux de construction mécanique stables courants. Son extension au cas des retours en arrière, aux conditions de température évolutive et aux matériaux non stables, est étudiée. Diverses applications théoriques et expérimentales prouvent qu'elle donne un ordre de grandeur acceptable des évolutions, dans le temps, de déformation ou de contrainte, associées à des programmes de charge et de température quelconques.

Ces résultats ont été généralisés au cas tridimensionnel isotrope sous la forme d'une loi tensorielle différentielle, dont l'expression est adaptée aux méthodes de calcul de structures par maillage et pas à pas. Une application au calcul des déformations d'un cylindre à paroi peu épaisse, soumis à un chargement complexe variable dans le temps, est traitée complètement et comparée à l'expérience. Dans le cas du chargement simple, les équations de la loi de comportement peuvent être intégrées sous une forme explicite. Un théorème, donnant des conditions suffisantes d'existence du chargement simple, est démontré pour une structure quelconque.

A l'aide de ces lois, on a mis en évidence le très grand intérêt des essais de relaxation dans la détermination des caractéristiques visco-plastiques des matériaux. Un certain nombre de méthodes en découlent, dont une méthode d'obtention des caractéristiques de fluage à long terme, à partir d'essais de relaxation de courte durée. Divers méthodes et moyens expérimentaux ont été élaborés pour la mesure précise des paramètres fondamentaux et la détermination systématique des fonctions et coefficients caractéristiques des matériaux. Un appareil à relaxation multiple, un appareil à fluage et une machine d'essais à chaud en traction-torsion-compression sont décrits.

Dans la mesure du possible, chaque paragraphe traitant d'un sujet susceptible d'applications est rédigé pour qu'il puisse être lu isolément.

Descripteurs (thésaurus CEDOCAR) : Ecoulement élastoplastique – Ecoulement viscoplastique – Relaxation contrainte – Fluage – Méthodes calcul – Structures – Méthodes essais – Matériel essais – Analyse mécanique – Solides.

ON THE DETERMINATION OF CONSTITUTIVE EQUATIONS FOR ELASTO-VISCO-PLASTIC MATERIALS

SUMMARY

Considerations of physics in solids and thermodynamics of continuous media permit, by the global method, to justify and generalize some types of onedimensional laws suggested originally to describe pure creep under constant load. A mechanical law of isothermal visco-plastic state, linking the stress, visco-plastic strain and its velocity, is proposed and verified for current stable materials used in mechanical construction. Its extension to the case of back return, to conditions of varying temperature, and to non-stable materials is studied. Various theoretical and experimental applications show that it gives an acceptable order of magnitude for the evolutions, with time, of strain or stress associated with any loading and temperature programmes.

These results have been generalized to the three-dimensional isotropic case under the form of a tensorial differential law, the expression of which is adapted to the structures computing method by network and step by step. An application to the deformation calculation of a thin-walled cylinder subjected to a time-varying complex loading, is completely treated and compared with experiments. In case of simple loading path, constitutive equations law may be integrated in an explicit form. A theorem, giving sufficient conditions of existence of the simple loading path is demonstrated for a structure of any shape.

Thanks to these laws, the great interest of the relaxation tests has been underlined for determining the visco-plastic characteristics of materials. A number of methods may be derived from them, one of which gives the long-term creep characteristics from short duration relaxation tests. Various methods and experimental facilities have been developed for measuring precisely the fundamental parameters and determining systematically the characteristic functions and coefficients of the materials. A multiple-relaxation device, a creep apparatus, and a traction-torsion-compression high temperature machine are described.

As far as possible, each section dealing with a subject liable to applications is written in such a way as it may be read by itself.

Descriptors (NASA thesaurus) : Constitutive equations – Elastoplasticité – Viscoplasticity – Creep properties – Stress relaxation – Tests – Test equipment – Structural analysis – Equations of state – Solids – Solid state.

LISTE DES PRINCIPALES NOTATIONS UTILISÉES

M : point matériel ou maille

t : paramètre temps

T : paramètre température

U : vecteur déplacement

D : module d'un vecteur déplacement

$\boldsymbol{\sigma}$: tenseur des contraintes

$\underline{\sigma}$: matrice représentative du tenseur $\boldsymbol{\sigma}$

σ_m : contrainte moyenne

$\mathbf{s}$: déviateur du tenseur des contraintes

$\underline{s}$: matrice représentative du déviateur $\mathbf{s}$

s_I, s_{II}, s_{III} : invariants du déviateur $\mathbf{s}$

σ : contrainte uniaxiale

σ_v : contrainte uniaxiale vraie

$\boldsymbol{\epsilon}$: tenseur des déformations totales

$\underline{\epsilon}$: matrice représentative du tenseur $\boldsymbol{\epsilon}$

ϵ_{II} : second invariant du tenseur $\boldsymbol{\epsilon}$

$\mathbf{e}$: déviateur du tenseur $\boldsymbol{\epsilon}$

ϵ : déformation axiale totale

ϵ_v : déformation axiale totale vraie

$\boldsymbol{\epsilon}_e$: tenseur des déformations élastiques

ϵ_{em} : déformation élastique moyenne

$\mathbf{e}_e$: déviateur du tenseur $\boldsymbol{\epsilon}_e$

ϵ_e : déformation axiale élastique

ϵ_{ve} : déformation axiale élastique vraie

$\boldsymbol{\epsilon}_p$: tenseur des déformations visco-plastiques

ϵ_{pm} : déformation visco-plastique moyenne

$\mathbf{e}_p$: déviateur du tenseur $\boldsymbol{\epsilon}_p$

$\underline{e_p}$: matrice représentative du déviateur $\mathbf{e}_p$

$e_{pI}, e_{pII}, e_{pIII}$: invariants du déviateur $\mathbf{e}_p$

ϵ_p : déformation axiale visco-plastique

ϵ_{vp} : déformation axiale visco-plastique vraie

$\tilde{e}_{pII}$, $\tilde{\epsilon}_{vp}$: paramètres de cumulation d'écrouissage

$\mathbf{1}$: tenseur unité

$\underline{1}$: matrice unité

$\mathcal{F}_{\text{indicée}}$: fonctionnelle non explicitée

$f_{\text{indicée}}$, $g_{\text{indicée}}$, $F_{\text{indicée}}$: fonctions non explicitées

$\dot{X}$: dérivée par rapport au temps de la grandeur X

ΔX, δX : accroissements finis de la grandeur X

E, E_v : modules d'Young

ν_e, ν_{ev} : coefficients de Poisson

ν : coefficient de contraction généralisé

G : module d'élasticité tangentiel

f, f_v : fonctions de visco-plasticité unidimensionnelles

ψ, ψ_v : fonctions d'écrouissage

φ, φ_v : fonctions de viscosité

K, K_v : coefficients de résistance unidimensionnelle

m, m_v : coefficients d'écrouissage

n, n_v : coefficients de viscosité

H : fonction d'état visco-plastique tridimensionnel

K_T : coefficient de résistance tridimensionnelle

S : section d'éprouvette cylindrique

L : longueur d'éprouvette

F : force

C : moment

p : pression

ρ : courbure

CHAPITRE I

ÉTUDES ET CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, sont rassemblées les idées qui caractérisent les motivations du travail entrepris et certains résultats fondamentaux connus de mécanique physique, qui permettent de situer les recherches effectuées dans un cadre général.

I,1. Buts

Le but essentiel de ce travail est d'essayer de définir des modèles de lois, des méthodes, et des moyens d'expérimentation associés permettant de fournir les données relatives aux matériaux dans les calculs de résistance des structures.

Actuellement, dans la plupart des cas, ces calculs de résistance sont effectués sur la base de la théorie de l'élasticité linéaire et, si les méthodes de calcul font encore l'objet de recherches, la loi caractéristique de l'élément de volume du corps élastique est parfaitement connue. Malheureusement, les matériaux de construction mécanique n'obéissent à cette loi simple que dans un domaine restreint de leurs paramètres caractéristiques, et encore s'agit-il d'une approximation. On sait qu'à la température ambiante ils peuvent être le siège de déformations plastiques, utilisées par exemple dans le formage ; à chaud les déformations viscoplastiques peuvent évoluer dans le temps quand bien même la sollicitation serait maintenue constante (fluage) ; la théorie de l'élasticité est donc insuffisante pour caractériser complètement ces matériaux.

Les lois de comportement qui sont développées ici se proposent de rendre compte, en plus de l'élasticité, des phénomènes de plasticité et de fluage qu'on ne peut plus ignorer en résistance des structures, soit pour les éviter, soit pour les utiliser.

- Pour bien calculer une structure avec les méthodes de l'élasticité, il faut s'assurer que toutes les valeurs des différents paramètres introduits appartiennent bien au domaine de validité de l'élasticité et, pour cela, déterminer les frontières de ce domaine, avec une loi de comportement évidemment plus complète que la loi de l'élasticité. Ce problème est beaucoup plus compliqué qu'il ne paraît à première vue, car ces frontières dépendent de l'utilisation envisagée au travers de critères tels que la précision souhaitée ou la durée d'utilisation prévue de la structure ; ces frontières ne sont pas intrinsèques au matériau. Souvent ce problème est contourné et à juste titre, par l'introduction de coefficients de sécurité («coefficients d'ignorance» dit le Pr. **Mazet**) suffisamment larges pour que l'on soit sûr que le cas envisagé se situe à l'intérieur du domaine de validité de la théorie de l'élasticité sans en avoir déterminé les frontières.

Cette méthode qui implique une pleine possession de «l'art de l'ingénieur» peut être dangereuse dans certains cas si le calcul est très simplifié, elle est inapplicable dans les cas où les conditions d'utilisation de la structure (masse minimale par exemple) imposent de faibles coefficients de sécurité.

- Ces coefficients de sécurité ont une autre utilité : celle de tenir compte globalement des marges d'incertitude qui existent toujours dans l'évaluation des sollicitations auxquelles est soumise la structure, dans la détermination numérique de la loi de comportement et dans les approximations inévitables de calcul. Plutôt que d'introduire des coefficients de sécurité empiriques à tous les niveaux, il semble bien qu'une méthode plus efficace (mais plus coûteuse en calculs) soit d'effectuer un vrai calcul de sécurité, une sorte de calcul d'erreur qui prévoit l'évolution de la structure dans le ou les cas les plus défavorables. La marge de sécurité peut alors être définie en toute connaissance de cause puisque le calcul qui rend compte des grandes déformations éventuelles de plasticité et de fluage, permet de savoir si la structure peut encore, ou non, remplir ses fonctions après les «surcharges» envisagées.
- Dans toutes les structures où la question de masse minimale est primordiale (structures aéronautiques ou aérospatiales par exemple) on est amené à tolérer certaines déformations plastiques et même un certain fluage sur tout ou partie de la structure (aubes de turbines, bords d'attaque de voilure d'avions supersoniques...). Les calculs de fluage sont actuellement effectués sur la base de lois simples qu'il est nécessaire d'améliorer pour rendre compte en particulier du fluage primaire et du fluage sous charge variable.

- Même dans les structures largement dimensionnées, il existe des régions où la répartition des contraintes est suffisamment perturbée pour engendrer des déformations plastiques ou visco-plastiques locales. Souvent, le calcul de ces zones «d'adaptation» n'est pas effectué faute de disposer de lois tridimensionnelles représentatives des phénomènes complexes d'interaction fluage-relaxation (statique ou dynamique) qui s'y développent. Les lois proposées ici tentent d'apporter une solution à ce problème de grande importance en construction mécanique car souvent ces zones sont le lieu de développement du phénomène de fatigue. D'une manière générale d'ailleurs, dans la prévision de la fatigue, des progrès sont à attendre de l'introduction de lois de comportement plus réalistes dans le calcul des champs de contraintes locaux (coefficient de concentration de contrainte, facteur d'intensité des contraintes), dans l'évaluation de l'endommagement et dans les problèmes de propagation de fissures.
- Signalons enfin l'importance de lois susceptibles de rendre compte des grandes déformations de fluage dans l'industrie du formage et particulièrement celle du fluotournage pour la conception des machines d'un coût très élevé.

I,2. Généralités sur les méthodes de calcul des structures

Concevoir une structure, c'est, dans tous les cas, réaliser un processus d'optimisation. Ce processus est implicite pour le dessinateur qui esquisse les contours d'une pièce mécanique et qui, de proche en proche, par de petits calculs «sur le bord de la planche» arrive à une solution finale. Il est explicite dans le cas où les calculs de résistance sont effectués sur ordinateur avec variation possible de certains paramètres géométriques. On peut même imaginer que, dans un avenir relativement proche, les formes de base des structures seront déterminées par l'ordinateur en fonction d'un programme d'optimisation faisant appel aux données et algorithmes suivants :

- La définition des fonctions de la structure qui détermine son squelette géométrique en fonction des types d'efforts ou de mouvements à transmettre et des liaisons avec les éléments voisins.
- Le programme des sollicitations extérieures en fonction du temps. Que l'on construise un pont pour 100 ans, une centrale électrique nucléaire pour 20 ans, une automobile pour 200 000 km, un appareil ménager pour 5 ans, un avion pour 30 000 heures de vol, un moteur pour 5 000 heures de fonctionnement ou un engin pour 10 minutes de vol, dans tous les cas les solutions adoptées dépendent de la durée de vie présumée de la structure.
- Les matériaux employés, dont le choix peut être déterminé le plus souvent a priori en fonction de considérations diverses comme :
  - les conditions d'environnement physico-chimique (résistance à la corrosion ou à l'oxydation par exemple)
  - les conditions de disponibilité et de prix de revient
  - les conditions de masse spécifique et de résistance (éventuellement en fonction de la température)
- Le critère d'optimisation retenu qui se traduit souvent par la minimisation du volume de la structure.
- La suite des calculs à effectuer qui met en jeu :
  - une méthode de calcul adaptée au type de structure envisagée
  - la loi de comportement de chacun des matériaux retenus.

Dans la plupart des cas, les méthodes de calcul des structures sont utilisées pour déterminer l'évolution des champs de contraintes et de déformations lorsque ces structures sont soumises à un programme de sollicitations. Elles englobent les équations de la mécanique des milieux continus et certaines hypothèses cinématiques spécifiques du type de structure (hypothèses de **Bernouilli** pour les poutres, de **Kirchoff-Love** pour les coques...) qui permettent de trouver des solutions approchées aux problèmes réels insolubles en toute rigueur. Le calcul des déformations plastiques ou visco-plastiques correspond dans tous les cas à des problèmes non linéaires pour 3 raisons principales : les lois de comportement ne peuvent être traduites que par des équations essentiellement non linéaires ; souvent l'hypothèse des petites déformations ne peut plus être appliquée ; enfin les grands déplacements résultants conduisent à une analyse non linéaire. Les méthodes de calcul classiques peuvent se classer en deux grandes catégories : les méthodes par discrétisation de la structure et les méthodes continues.

- Parmi les premières, citons les méthodes par maillage dans lesquelles la solution est obtenue par valeurs discrètes en recherchant pour chaque maille **M** (partition de la structure) l'opérateur ϕ qui relie le champ de déplacement U au temps t [1] :

$$U = \phi\,(M, t)$$

- Parmi les secondes, citons les méthodes globales dans lesquelles le déplacement U est représenté par une combinaison de fonctions d'espace ψ choisies a priori et de fonction du temps Q [2] :

$$U = \sum_i \psi_i (M) . Q_i (t)$$

L'utilisation de ces méthodes, courante en élasticité, présente des difficultés en plasticité et visco-plasticité surtout lorsque les grandes déformations plastiques ou visco-plastiques engendrent de grandes modifications de la géométrie initiale de la structure. Dans les cas où ces déformations sont localisées, on peut envisager des méthodes semi-globales [3] dans lesquelles les zones plastiques sont calculées par maillage et leurs déformées superposées aux déformées élastiques globales du reste de la structure.

Sauf en de rares exceptions [4 - 5], les problèmes non linéaires de plasticité et de visco-plasticité doivent être traités par des calculs pas à pas dans lesquels le problème est linéarisé à chaque pas. D'autre part, les calculs par maillage se situent au niveau de l'élément de volume. On comprend alors que les lois de comportement destinées à ce genre de calculs doivent avoir une forme particulière adaptée à la méthode de calcul. D'une manière générale d'ailleurs, il existe une imbrication étroite entre la forme des lois de comportement et la nature des méthodes de calcul. Ces deux types de recherches ne peuvent être conduits isolément sans courir le risque d'aboutir à des lois de comportement inapplicables ou bien à des méthodes de calculs incompatibles avec la nature des phénomènes mis en jeu. Il peut paraître surprenant de rechercher a priori certaines formes d'une loi que l'on pourrait imaginer unique puisque représentative du comportement rhéologique intrinsèque du matériau. En fait, l'état actuel des connaissances en mécanique des solides ne permet pas d'écrire « la loi » de comportement d'un matériau et, en fonction du degré d'imprécision toléré, en fonction du but recherché, plusieurs voies de recherche conduisant à des types de lois différents sont envisageables.

Les lois développées ici tentent de décrire le comportement de l'élément de volume en vue d'un calcul pas à pas dans le temps. Ceci implique qu'elles soient suffisamment simples pour ne pas conduire à des calculs inextricables, c'est-à-dire que nous acceptons d'emblée une schématisation grossière du comportement des matériaux qui peut exclure certains phénomènes physiques importants, mais pouvant être considérés comme secondaires dans un calcul de structure. C'est la volonté d'obtenir des lois applicables qui distingue la démarche, adoptée ici, de certaines voies de recherche peut-être plus rigoureuses et prometteuses pour l'avenir mais qui n'ont pas encore abouti à des résultats suffisamment concrets pour les calculs de structure. Dans le même ordre d'idées, tous les résultats expérimentaux présentés concernent des matériaux industriels du commerce de façon à chiffrer la dispersion d'applications réelles.

I,3. Les paramètres d'état

Les paramètres fondamentaux qui intéressent les calculs de structures au niveau de l'élément de volume sont :

- 2 paramètres tensoriels : le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations ;
- 2 paramètres scalaires : la température et le temps.

Des considérations de physique des solides et de thermodynamique des milieux continus permettent de préciser quels sont les paramètres, compatibles avec les méthodes de calcul envisagées, qui rendent compte de l'état rhéologique du matériau.

I,3.1. Résultats de physique des solides

On sait qu'à l'échelle du mécanicien, les matériaux métalliques peuvent être considérés comme un agrégat de monocristaux impurs et que la déformation fait appel à deux mécanismes physiques différents.

- Sous l'action d'une sollicitation, les positions relatives des atomes constitutifs de chaque cristal varient d'une manière réversible par rapport à la sollicitation, engendrant ainsi des déformations élastiques.
- Cette même sollicitation provoque simultanément des mouvements de dislocations qui engendrent des déformations tangentielles dans certaines directions de plans cristallographiques particuliers. Ces déformations peuvent être très grandes par rapport aux déformations élastiques ; elles mettent en jeu des processus fonction du temps qui se traduisent globalement par une viscosité ; elles subsistent après cessation de la sollicitation et engendrent une forte anisotropie ; ce sont les déformations visco-plastiques, appelées aussi déformations plastiques lorsque la viscosité est indécelable ou négligée.

Suivant les considérations de température, de contrainte et plus généralement d'environnement, ces déformations plastiques ou visco-plastiques sont engendrées par des mécanismes physiques différents,

que la théorie des dislocations permet d'expliquer [6]. L'étude des forces mises en jeu dans les mouvements de dislocations (forces de **Peierls-Nabarro**) conduit à des lois unidimensionnelles reliant la contrainte, la déformation visco-plastique et la température [7 - 8]. Par contre, les hypothèses introduites limitent leur champ d'application à des cas bien particuliers, liés à des processus physiques caractéristiques de certains types de cristaux à certaines températures, sous des types et des valeurs de sollicitations bien définis.

Grâce à une meilleure connaissance des processus gouvernant les mouvements de dislocations, des travaux récents montrent qu'il est possible, par les méthodes de la statistique, de généraliser tous ces résultats partiels. Cette voie de recherche est certainement une voie d'avenir en matière de loi de comportement ; malheureusement, actuellement les travaux n'ont pas encore abouti à des lois suffisamment explicites et simples pour être exploitables. Dans ce domaine, les travaux de **Zarka** et de **Kröner** constituent une base solide et les formes de lois qu'ils proposent sont proches de celles qui sont développées ici, d'une toute autre manière.

J. Zarka [9] introduit la notion de système de dislocations qui représente une distribution de segments de dislocations parallèles entre eux et de même vecteur de **Burgers**. Grâce à l'introduction d'hypothèses simplificatrices et de la notion de forces de **Peierls-Nabarro**, il est possible de calculer la force, par unité de longueur de dislocation, nécessaire pour provoquer, soit un déplacement parallèle (montée des dislocations, et glissement dévié) soit un déplacement petit ou grand dans son plan (glissement de boucles par le mécanisme de **Franck-Read**). En fonction de ces forces et de la distribution des dislocations, on calcule les temps nécessaires aux dislocations pour effectuer certains mécanismes élémentaires (franchissement d'une autre dislocation, création d'une boucle...). Ceci permet à chaque instant de faire le «bilan différentiel» des dislocations et de calculer les accroissements des déformations tangentielles résultants. Ce sont ces temps qui, globalement, se traduisent par une viscosité. Le passage au polycristal, possible rigoureusement, se fait d'une manière approchée par l'introduction d'un modèle phénoménologique. Les équations finales sont les suivantes :

$$d\mathbf{e}_p = F_z\left(s_{II} - s_{II_1},\ s_{II} - s_{II_2},\ \mu_z,\ N_z,\ T\right)\ \frac{\mathbf{s}}{2\,s_{II}}\ dt$$

$$dN_z = G_z\left(s_{II} - s_{II_1},\ s_{II} - s_{II_2},\ \mu_z,\ N_z,\ T\right)\ dt$$

où : $\mathbf{e}_p$ est le déviateur du tenseur des déformations visco-plastiques

$\mathbf{s}$ est le déviateur du tenseur des contraintes

s_{II} est le second invariant de $\mathbf{s}$ (contrainte équivalente)

s_{II_1} et s_{II_2} sont des seuils de contraintes caractéristiques du matériau et correspondant à la disparition et à la création des dislocations

μ_z est un coefficient caractéristique du matériau, lié à la distribution des grains dans le polycristal

T est la température

t est le temps

N_z est la densité par unité de masse de segments de dislocations de longueur moyenne dans le polycristal

F_z et G_z sont deux fonctions dont l'explicitation est possible en fonction des caractéristiques physiques des cristaux métalliques.

Ce résultat est à rapprocher de celui de **E. Kröner** [10] qui, à partir de considérations similaires de physique des solides, mais en se limitant aux déformations plastiques (sans viscosité), a pu représenter la création des dislocations par :

$$d\boldsymbol{\Gamma}_K = G_K\left(\boldsymbol{\sigma},\ \boldsymbol{\Gamma}_K\right)\ d\mathbf{e}_p$$

où : $\boldsymbol{\Gamma}_K$ est le tenseur de densité de boucles de dislocations

G_K une fonction, à valeur scalaire, des invariants du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et des invariants du tenseur $\boldsymbol{\Gamma}_K$

La déformation visco-plastique est alors exprimée par :

$$d\mathbf{e}_p = -\frac{\overline{\dfrac{\delta f_p}{\delta \boldsymbol{\sigma}}}}{\dfrac{\delta f_p}{\delta \boldsymbol{\Gamma}_K}\left(\dfrac{\overline{\delta f_p}}{\delta \boldsymbol{\sigma}}\right)\cdot G_K}\ d\sigma\ f_p$$

où f_p est la fonction de charge ou potentiel plastique ; la barre désigne la transposition.

Si l'on admet la validité du résultat de **Kröner** dans la théorie de **J. Zarka**, et si l'on pose que la densité scalaire de dislocations N est reliée à la densité tensorielle Γ_K par :

$$N_z = f_z (\Gamma_{K_I}, \Gamma_{K_{II}}, \Gamma_{K_{III}})$$

($\Gamma_{K_I}, \Gamma_{K_{II}}, \Gamma_{K_{III}}$ étant les 3 invariants du tenseur Γ_K)
comme Γ est une fonctionnelle de ε_p et de σ au travers de l'équation différentielle en $d\Gamma_K$, en négligeant l'influence du premier et du troisième invariant de σ , on peut dire que N_z est une fonctionnelle de ε_p et de s_{II} :

$$N_z = \mathcal{F}_z (s_{II} , \varepsilon_p)$$

d'où une nouvelle écriture de la loi de **J. Zarka** :

$$d\varepsilon_p = F_z (s_{II} - s_{II_1} , s_{II} - s_{II_2} , \mu_z , \mathcal{F}_z (s_{II} , \varepsilon_p), T) \frac{s}{2 s_{II}} dt$$

Nous verrons au chapitre III quel rapprochement on peut faire entre cette loi et celles qui peuvent être obtenues par une méthode globale.

I,3.2. Résultats de thermodynamique des milieux continus

Une toute autre voie de recherche des lois de comportement est une approche purement phénoménologique par les méthodes de la thermodynamique. Selon les postulats sur lesquels sont fondés les développements, on peut distinguer trois approches différentes [11].

- Une première approche appelée « thermodynamique des processus irréversibles » est basée sur les travaux de **L. Onsager** et admet les postulats suivants :
  - Principe de l'état local
  - Validité de la relation de **Gibbs**
  - La production d'entropie est exprimée par une somme de produits de forces (causes) par les flux (effets) correspondants
  - Les flux sont des fonctions (éventuellement non linéaires) des forces
- Une deuxième approche, appelée « théorie thermodynamique des matériaux à mémoire » due à **B.D. Coleman** et **W. Noll** est fondée sur les postulats suivants :
  - La température et l'entropie existent pour les états d'équilibre ou non
  - Les équations constitutives vérifient l'inégalité de **Clausius-Duhem.**
  - L'état d'un point matériel est caractérisé par l'histoire de sa configuration locale.
- Une troisième approche développée par **J. Meixner** : « théorie thermodynamique des systèmes passifs », fait appel aux postulats suivants :
  - La notion d'entropie n'est valable que pour les états d'équilibre
  - Une inégalité définie à l'équilibre à partir du deuxième principe exprime la propriété fondamentale de passivité
  - La température existe pour les états non en équilibre
  - La théorie est limitée aux états s'écartant peu de l'équilibre.

La première approche est limitée par les hypothèses inhérentes aux relations d'**Onsager-Casimir.** La deuxième approche conduit à des développements plus généraux, particulièrement pour les matériaux non linéaires, mais elle est souvent critiquée à cause des difficultés d'interprétation physique des quantités introduites [12]. La troisième approche est limitée actuellement aux problèmes linéaires. Quoi qu'il en soit, les méthodes de la thermodynamique conduisent à des limitations, que doivent obligatoirement vérifier les lois de comportement, [13] mais aucune théorie n'a encore abouti à une loi explicite contenant le paramètre température pour les matériaux rhéologiquement non-linéaires. **J.C. Halley** [14], suivant la première approche, a pu traduire le comporte-

ment des solides élasto-visco-plastiques non linéaires en assimilant la déformation visco-plastique à un paramètre caché dont la notion a été introduite par **J. Meixner** et **M. A. Biot** [15]. Dans le cas unidimensionnel, la loi s'exprime sous forme différentielle :

$$\begin{bmatrix} d\sigma \\ -dS_T \\ 0 \\ dq_c \end{bmatrix} = A_H(\epsilon, \epsilon_p, T) \begin{bmatrix} d\epsilon \\ dT \\ -d\epsilon_p \\ 0 \end{bmatrix} + B_H(\epsilon, \epsilon_p, T) \begin{bmatrix} d\dot{\epsilon} \\ d\dot{T} \\ -d\dot{\epsilon}_p \\ d(\overrightarrow{\text{grad}}\, T) \end{bmatrix}$$

où σ est la contrainte unidimensionnelle

S_T est l'entropie

q_c est le vecteur flux de chaleur

ϵ est la déformation unidimensionnelle

ϵ_p est la déformation visco-plastique

T est la température

A_H et B_H sont deux matrices de coefficients phénoménologiques dépendant de l'état défini par ϵ, ϵ_p et T, explicités seulement dans le cas isotherme.

Là encore, nous verrons que la forme de cette loi est voisine de celles qui sont développées au chapitre II.

I,3.3. La méthode globale

Une manière d'aboutir rapidement à des lois explicites exploitables est d'appliquer les principes de la méthode globale à l'élément de volume de matière :

L'élément de volume est considéré comme un système mécanique et, à ce titre, son évolution doit être entièrement régie par des lois reliant forces et déplacements. On conçoit aisément que l'ensemble des points matériels, représentatif d'un élément de volume de matière, possède une quasi-infinité de degrés de liberté et que cette représentation discrète doit être abandonnée au profit d'une représentation continue. Comme les valeurs instantanées des trois paramètres globaux, tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}_{(t)}$ tenseur des déformations $\boldsymbol{\epsilon}_{(t)}$, température $T_{(t)}$, sont insuffisantes pour représenter l'état rhéologique du matériau, deux voies sont possibles :

- l'introduction de « l'histoire des paramètres » qui conduit aux lois de type intégral
- l'introduction de « paramètres cachés » qui conduit aux lois de type entier ou différentiel.

A partir du principe de **Boltzmann** généralisé développé par **Bychawsky** et **Fox** [16], **A. Souissi** a établi une loi de comportement de type intégral, valable pour les matériaux visco-plastiques non-linéaires [17], dont la formulation est la suivante :

$$\boldsymbol{e}(M,t) = \frac{1+\nu_e}{E}\,\boldsymbol{s}(M,t) + \left[\frac{3}{2}\right]^{\frac{n_s+1}{2}} \int_0^t \frac{dC_s(t-\tau)}{dt}\, s_{II}^{n_s-1}(M,\tau)\, \boldsymbol{s}(M,\tau)\, d\tau$$

$$T_r\,(\boldsymbol{\epsilon}_{(M,t)}) = \frac{1-2\nu_e}{E}\, T_r\,(\boldsymbol{\sigma}_{(M,t)})$$

où $\boldsymbol{e}$ est le déviateur du tenseur des déformations $\boldsymbol{\epsilon}$: $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{3} T_r(\boldsymbol{\epsilon}).\mathbf{1} + \boldsymbol{e}$

$\boldsymbol{s}$ est le déviateur du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$

s_{II} est le second invariant de $\boldsymbol{s}$

$C_{s(t)}$ est la fonction fluage

n_s est un scalaire décrivant la non linéarité de la viscosité

E et ν_e sont les coefficients d'**Young** et de **Poisson** caractéristiques de l'élasticité linéaire.

Cette loi intégrale, particulièrement riche puisque le matériau est représenté par 3 coefficients et une fonction, a été bien vérifiée par l'expérience dans un cas assez sévère [18]. Malheureusement elle est mal adaptée au calcul des structures par maillage et pas à pas.

A. Souissi a pu démontrer une condition suffisante d'existence d'une loi différentielle équivalente à cette loi intégrale :

$$\sum_{k=0}^{p} b_k \left[\boldsymbol{\varepsilon}_{(t)} - \frac{1+\nu_e}{E} \boldsymbol{S}_{(t)} \right]^{(k)} = \sum_{k=0}^{q} a_k \left[s_{II(t)}^{n_s-1} \cdot \boldsymbol{S}_{(t)} \right]^{(k)}$$

la fonction fluage C_s étant solution de l'équation différentielle :

$$\sum_{k=0}^{p} b_k \, C_{s(t)}^{(k)} = a_0$$

En posant $C_s(t) = Ech\,(t) \cdot t$, on retrouve la loi d'**Odqvist** [19] bien vérifiée dans le cas particulier du fluage établi sous charge constante

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1+\nu_e}{E} \dot{\boldsymbol{S}} + C_{FS} s_{II}^{n_s-1} \boldsymbol{S}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(o)} = \frac{1+\nu_e}{E} \boldsymbol{S}_{(o)}$$

Ceci nous amène à considérer des lois entre paramètres dont seule la valeur instantanée intervient. Pour pallier l'insuffisance des paramètres globaux, tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$, on peut introduire un certain nombre de paramètres cachés [20].

Les résultats de physique du solide et de thermodynamique exposés aux paragraphes I,3.1 et I,3.2 suggèrent en premier lieu l'introduction du paramètre caché « tenseur des déformations visco-plastiques » $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ [21] qui peut aussi être introduit sous forme d'une liaison au niveau de l'élément de volume [22]. La déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ s'obtient par addition de $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ au tenseur des déformations élastiques $\boldsymbol{\varepsilon}_e$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p$$

Cette partition classique de la déformation totale en déformation élastique et déformation visco-plastique est bien définie qualitativement du point de vue de la physique du solide, puisque ces deux déformations correspondent à des mécanismes différents. Néanmoins, il se pose un problème de définition au niveau de l'élément de volume mécaniquement homogène et physiquement hétérogène. Les glissements visco-plastiques élémentaires engendrent des contraintes internes qui créent des déformations élastiques élémentaires ; de ce fait, la déformation élastique de l'élément de volume n'est pas la somme (au sens de l'intégrale) des déformations élastiques élémentaires découplées [23]. Nous adoptons la définition globale suivante :

- Soit Ω l'espace de configuration des phénomènes rhéologiques de tout matériau. Soit $\underline{p}$ la colonne des paramètres d'état et $\underline{p_o}$ sa valeur pour un état de référence donné, correspondant à la valeur nulle de toutes les sollicitations extérieures à l'élément de volume. Nous postulons l'existence d'une loi d'élasticité tangente définie par :

$$\underline{p} = \underline{p_o} \longrightarrow d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}_e = F_e \, (d\boldsymbol{\sigma})$$

- L'existence de cette loi est prolongée sur tout l'espace Ω

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = F_e \, (\boldsymbol{\sigma}), \qquad \forall \, \underline{p} \subset \Omega$$

- La déformation visco-plastique est alors définie par différence :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_e = \boldsymbol{\varepsilon} - F_e \, (\boldsymbol{\sigma}), \qquad \forall \, \underline{p} \subset \Omega$$

En pratique, la loi d'élasticité F_e est le plus souvent déterminée en admettant l'existence d'un domaine fini $\Omega_{el} \subset \Omega$ dans lequel la déformation visco-plastique peut être négligée

$$\underline{p} \subset \Omega_{el} \longrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_p \ll \boldsymbol{\varepsilon}_e$$

Comme nous cherchons une forme de loi la plus simple possible, nous nous limitons à l'introduction de ce seul paramètre caché $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ en nous réservant la possibilité d'en introduire d'autres si celui-ci s'avère insuffisant. La méthode globale consiste alors à déterminer par des expériences judicieuses comment ces paramètres interviennent et à en déduire les lois qui les relient. Nous nous limitons ici à l'étude de l'influence des para-

mètres $\sigma, \epsilon_e, \epsilon_p, T$ et de leur vitesse, dérivée première par rapport au temps, $\dot{\sigma}, \dot{\epsilon}_e, \dot{\epsilon}_p, \dot{T}$ en rejetant a priori pour les matériaux stables toute forme de loi dans laquelle le temps interviendrait comme paramètre indépendant.

Nous recherchons donc une loi du type :

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$$

$$\epsilon_e = F_e(\sigma)$$

$$F_p(\sigma, \dot{\sigma}, \epsilon_p, \dot{\epsilon}_p, T, \dot{T}) = 0$$

où F_e et F_p sont des fonctions caractéristiques des matériaux.

ϵ est le tenseur linéarisé des déformations, nous restons dans le cadre de l'hypothèse des petites déformations : $\epsilon_{II} < 5\ \%$ (ϵ_{II} étant le second invariant de ϵ).

Dans tous les cas, la définition des déformations et des contraintes doit être compatible avec la méthode de calcul employée :

- Déformation vraie et contrainte vraie (rapportées à la géométrie instantanée de la structure) pour les calculs pas à pas avec calcul de la nouvelle géométrie à chaque pas :

  ⟶ $\epsilon(t + \delta t) = \epsilon(t) + \delta\epsilon$

  ⟶ conditions d'équilibre écrites sur la géométrie au temps t.

- Déformation apparente et contrainte apparente (rapportées à la géométrie initiale) pour les calculs effectués en termes finis sur la géométrie de la structure initiale non chargée.

La méthode globale présente l'intérêt de pouvoir s'appliquer à tout matériau, indépendamment de sa structure physique. Les méthodes qui sont développées ici s'appliquent, pour la plupart, aussi bien aux matériaux métalliques qu'aux matériaux synthétiques et même aux matériaux composites dans la mesure où l'élément de volume au sens de la mécanique des milieux continus peut être défini. Il faut souligner là une énigme de la rhéologie : les phénomènes globaux ont qualitativement la même allure, pour les métaux et alliages, que pour les composés de synthèse.

La faiblesse de la méthode globale réside dans le choix des paramètres d'état ; aussi, dans ce domaine, elle doit s'appuyer sur les résultats de physique du solide et de thermodynamique des milieux continus. L'introduction des modèles rhéologiques [24] a pu, dans certains cas, clarifier la mise en équation des problèmes [25] et aboutir à des lois adaptées au calcul des structures [26] mais le modèle élémentaire résulte toujours d'un choix «a priori».

Citons enfin deux hypothèses classiques, d'ailleurs liées, qui seront largement utilisées dans la suite :

- Les déformations plastiques ou visco-plastiques n'engendrent pas de variation de volume qui est tout entière due aux déformations élastiques. Cette hypothèse, bien vérifiée par de nombreuses expériences [27], est tout à fait en accord avec les mécanismes physiques de déformation exposés au paragraphe I,3.1.
- L'addition d'un état de contrainte isotrope ne modifie pas les phénomènes de visco-plasticité de l'élément de volume. Cette hypothèse a été très bien vérifiée expérimentalement jusqu'à des pressions hydrostatiques de 30 000 atmosphères ($\#$ 300 daN/mm^2) et même plus [27].

Dans les deux chapitres suivants, on va préciser les formes des lois auxquelles on peut aboutir par la méthode globale, dans l'esprit qui a été indiqué.

CHAPITRE II

LOIS UNIDIMENSIONNELLES

II,1. Définition de l'état unidimensionnel

Dans ce chapitre sont développées des relations décrivant le comportement rhéologique d'un élément de volume de matériau sollicité par un état de contrainte qui peut être représenté par un tenseur uniaxial $\boldsymbol{\sigma}$; il existe une base dans laquelle ce tenseur est représenté par une matrice ne possédant qu'une seule composante: la contrainte normale σ suivant l'axe considéré.

L'expérience de référence est l'expérience de traction simple : un cylindre droit de section S et de longueur L est sollicité par un champ de contrainte uniforme normal à S engendré par une force axiale de traction F :

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

Sous l'action de cette contrainte, le cylindre s'allonge, suivant son axe, de ΔL . Dans le cas général, la section S varie, il existe une déformation transversale, le tenseur $\boldsymbol{\epsilon}$ représentatif de l'état de déformation n'est pas un tenseur uniaxial [28]. Si $\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$ est la composante axiale de la déformation, les considérations de symétrie du problème permettent d'écrire la matrice $\underline{\epsilon}$ représentative du tenseur $\boldsymbol{\epsilon}$ sous la forme classique :

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon & & \\ & -\nu\epsilon & \\ & & -\nu\epsilon \end{bmatrix}$$

où ν est un scalaire, fonction de l'état rhéologique, qui se réduit au coefficient de **Poisson** dansle cas élastique.

Il est possible de généraliser le coefficient de **Poisson** au cas des déformations élasto-visco-plastiques dans le cadre de l'hypothèse des petites déformations à l'aide des deux hypothèses suivantes (voir paragraphe I,3.3),

- partition de la déformation ϵ en déformation élastique ϵ_e et déformation visco-plastique ϵ_p

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$$

- les déformations visco-plastiques n'engendrent pas de variation de volume, les déformations élastiques engendrent une contraction exprimée par le coefficient de **Poisson** ν_e .

L'hypothèse des petites déformations permet de calculer le coefficient de contraction dû aux déformations visco-plastiques ν_p :

$$\nu_p = \frac{1}{2}$$

La matrice des déformations unidimensionnelles peut être exprimée par :

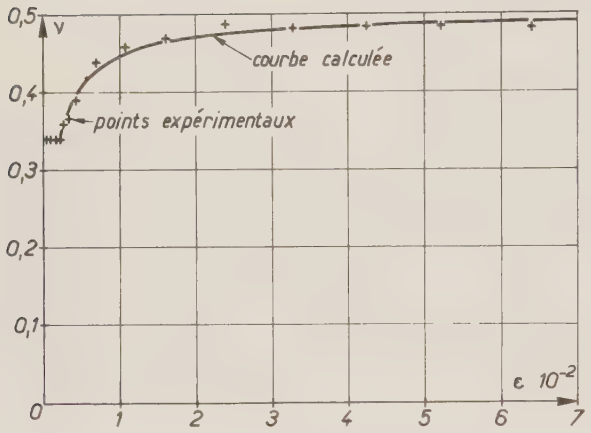
$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon & & \\ & -\nu\epsilon & \\ & & -\nu\epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_e & & \\ & -\nu_e\epsilon_e & \\ & & -\nu_e\epsilon_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_p & & \\ & -\nu_p\epsilon_p & \\ & & -\nu_p\epsilon_p \end{bmatrix}$$

d'où l'on tire [29] :

$$\boxed{\nu = \nu_e \frac{\epsilon_e}{\epsilon} + \nu_p \frac{\epsilon_p}{\epsilon}}$$

Dans le cas de l'élasticité linéaire $\sigma = E\epsilon_e$, et avec $\nu_p = \frac{1}{2}$

$$\nu = \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{\epsilon}\left[\frac{1 - 2\nu_e}{2E}\right]$$



La figure II,1 montre l'évolution de ν en fonction de la déformation ϵ dans le cas d'un duralumin. Les valeurs expérimentales ont été obtenues par une mesure de l'évolution du diamètre d'une éprouvette de section circulaire lors d'un essai quasi-statique en traction simple, mesure particulièrement délicate par la précision qu'elle exige. La bonne vérification expérimentale constitue une justification indirecte de l'hypothèse d'incompressibilité visco-plastique.

Fig. II,1 - Evolution du coefficient de Poisson élasto-plastique
- Duralumin AU 4 G trempé vieilli
- Température 20° C

II,2. Existence d'une loi mécanique d'état

Nous recherchons par la méthode globale si une relation entre les paramètres mécaniques définis au chapitre peut rendre compte des propriétés rhéologiques des matériaux de construction mécanique. L'existence d'une loi mécanique d'état est une question controversée depuis fort longtemps. Une analyse des conditions métallurgique d'existence est donnée dans l'ouvrage de **Lubahn** et **Felgar** [30] où des résultats expérimentaux partiels montren que ce concept peut être envisagé lorsqu'aucun changement métallurgique n'intervient, c'est-à-dire lorsque le matériau est métallurgiquement stable.

II,2.1. Cas des matériaux stables

Il s'agit ici de la stabilité au sens physique du terme. L'évolution des propriétés rhéologiques du matériau en l'absence de sollicitations thermomécaniques peut être négligée dans le laps de temps qui correspond à l'utilisation envisagée. La loi de comportement est invariante par une translation dans le temps (principe d'objectivité).

En fait, tous les matériaux sont plus ou moins instables (restauration, recouvrance, recristallisation, vieillissement...) et il est nécessaire de vérifier pour chaque application particulière si le cas envisagé entre bien dans le domaine de validité de l'hypothèse de stabilité. Les intervalles de variation des paramètres définissant ce domaine sont malgré tout assez grands car on cherche toujours à élaborer des matériaux les plus stables possible.

II,2.1.1. Cas isotherme quasi-statique sans retour arrière

La température de l'élément de volume ou de l'éprouvette de traction simple est supposée constante et uniforme ; l'histoire de la sollicitation est supposée telle que la déformation totale ϵ ne décroisse pas

$$\dot{\epsilon} \geq 0 \quad \forall t$$

Les phénomènes sont supposés suffisamment lents pour que les effets d'inertie puissent être négligés.

De très nombreux travaux ayant donné lieu à des traductions analytiques phénoménologiques ont été effectués. Si l'on excepte les travaux liés à la recherche des caractéristiques élastiques et à la détermination d'une limite d'élasticité et d'une limite de rupture conventionnelles, la plupart des études concernent le fluage strict sous charge constante.

En 1929, **Norton** [31] montrait que dans un ensemble d'essais de fluage sous charge constantes exécutés sur des aciers à la même température mais à des contraintes différentes, la vitesse de fluage secondaire $\dot{\epsilon}^* = M$ pouvait être reliée à la contrainte par :

$$\dot{\epsilon}^* = \left[\frac{\sigma}{\lambda_N}\right]^{n_N}$$

D'autres auteurs [29 - 32] ont proposé d'autres expressions analytiques, mais ne retenons que la forme générale qui les englobe toutes :

$$\dot{\epsilon}^* = A_f(\sigma)$$

Andrade en 1910 [33] avait montré que le fluage primaire pouvait être représenté par une expression de la forme :

$$\epsilon = B_f(\sigma).t^{\frac{1}{3}}$$

Une telle relation ne peut rendre compte d'un fluage où la contrainte varie par paliers. Dans ce cas, pour traduire l'écrouissage fonction de la déformation et non du temps, on peut obtenir une relation mécanique en éliminant le temps entre l'équation d'**Andrade** et sa dérivée par rapport au temps et en introduisant la loi de **Norton** supposée valable en fluage primaire.

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{3}\left[\frac{\sigma}{\lambda'_N}\right]^{3n_N} \epsilon^{-2}$$

Les travaux d'**Odqvist** [34], **Hoff** [35], **Dorn** [36] ont montré qu'une forme généralisant celle-ci et appelée loi de **Norton-Nadaï-Hoff**

$$\dot{\epsilon} = a\,\sigma^{\mu_1}\epsilon^{-\mu_2}$$

donnait des résultats assez proches des expériences de fluage isotherme où la charge varie par paliers. Dans le même temps, les travaux de **Malinine** [37], **Rabotnov** [38], **Katchanov** [4], **Namiestnikov** [39] aboutissaient en Union Soviétique à des conclusions assez voisines.

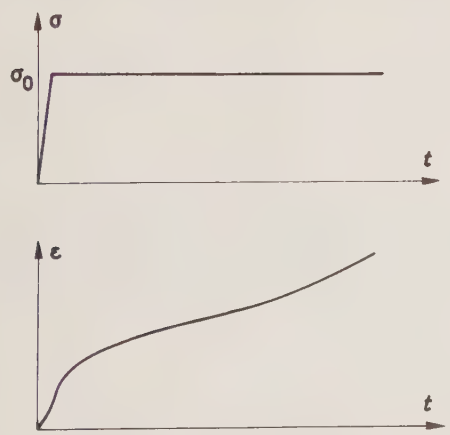
Dans la recherche d'une loi mécanique d'état, il était intéressant de voir si une telle forme n'avait pas une portée plus générale en rendant compte des phénomènes associés à un programme de sollicitation quelconque.

Il est alors possible de prendre le problème d'une autre manière en appliquant les principes de la méthode globale qui consiste là à tirer les fonctions caractéristiques d'essais globaux ne mettant en jeu que des paramètres mécaniques.

Dans une expérience en traction simple isotherme, notre référence, les deux seuls paramètres sur lesquels on peut agir directement sont la contrainte et la déformation qui correspondent à une force ou à un déplacement imposés. Ces deux paramètres sont d'ailleurs les seuls qui intéressent, en tant que cause et effet, les calculs de résistance des structures. On peut donc envisager des expériences à force imposée et à déplacement imposé. Les considérations développées au chapitre I et les résultats d'**Odqvist, Hoff, Dorn** suggèrent l'intérêt de la vitesse de ces paramètres. Comme il est technologiquement possible d'imposer force et déplacement constants ou à vitesse constante, nous introduisons « les quatre expériences de la méthode globale » suivantes :

– Essai à force constante imposée : l'essai dit « de fluage » largement exploité en métallurgie pour caractériser métaux et alliages (fig. II,2).

Un échelon contrainte $\sigma = \sigma_0\,Ech(t)$ est imposé à l'éprouvette et l'évolution de la déformation résultante est mesurée en fonction du temps : $\epsilon(t)$



◀ *Fig. II,2 - Essai de fluage*

– Essai à vitesse de force constante. Cet essai qui n'est pratiquement pas utilisé n'a pas de nom particulier.

– Essai à déformation constante imposée :
l'essai dit «de relaxation» utilisé surtout en rhéologie des polymères et assez peu jusqu'ici dans l'étude des matériaux métalliques (fig. II,3).

Un échelon déformation $\epsilon = \epsilon_0 \, Ech(t)$ est imposé à l'éprouvette et l'évolution de la contrainte résultante est mesurée en fonction du temps. $\sigma(t)$

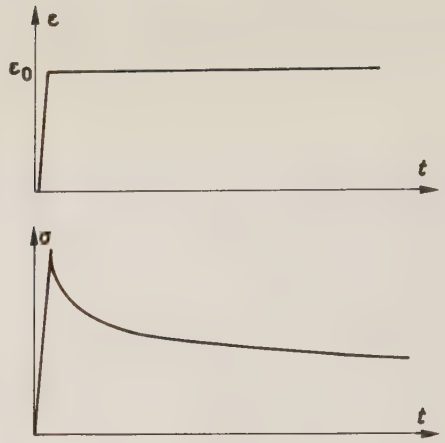


Fig. II,3 - Essai de relaxation ▶

– Essai à vitesse de déplacement constante :
l'essai dit «d'écrouissage» très utilisé en résistance des matériaux (fig. II,4).

Un échelon vitesse de déformation $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 \, Ech(t)$ est imposé à l'éprouvette et l'évolution de la contrainte est mesurée en fonction de la déformation $\sigma(\epsilon)$.

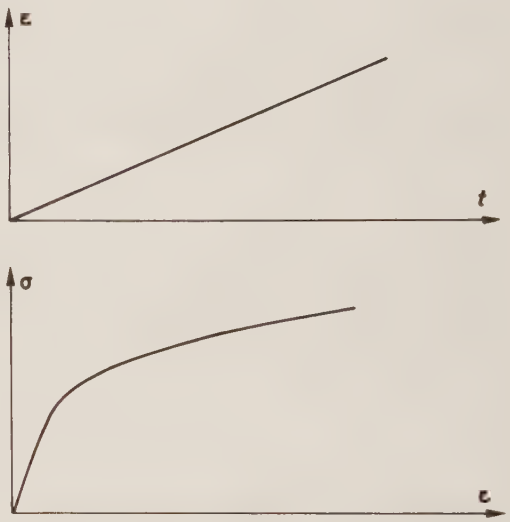
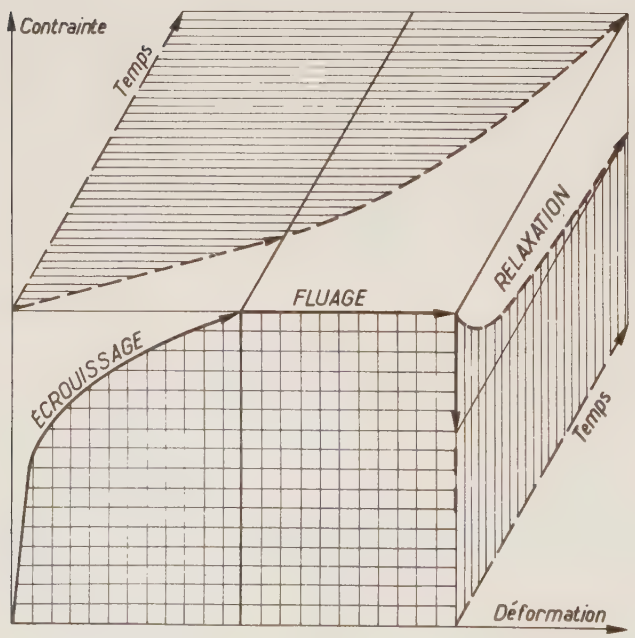


Fig. II,4 - Essai d'écrouissage ▶

Les trois essais de base sont représentés schématiquement sur la figure II,5.



◀ *Fig. II,5 - Les 3 essais de la méthode globale*
- *Ecrouissage* $\dot{\epsilon}$ = cte ⟶ $\sigma(\epsilon)$
- *Fluage* σ = cte ⟶ $\epsilon(t)$
- *Relaxation* ϵ = cte ⟶ $\sigma(t)$

Dans la suite de ce paragraphe, la contrainte et la déformation seront rapportées à la géométrie instantanée de l'éprouvette (longueur L, section S), différente de la géométrie initiale (L_o, S_o) sous l'action de la force de traction F.

$$\epsilon_v = \frac{\Delta L}{L} = \text{Log}\left(1 + \frac{\Delta L}{L_o}\right) = \text{Log}\,(1 + \epsilon)$$

$$\sigma_v = \frac{F}{S} \# \frac{F}{S_o}\left[1 + \epsilon\right]$$

Toutes les grandeurs «vraies» seront indicées: v.

Si, pour un corps élasto-visco-plastique (matériaux métalliques), on étudie la courbe représentative d'un essai d'écrouissage, à vitesse relativement élevée, interrompu ($F \rightarrow 0$) et repris un certain nombre de fois (fig. II,6) on constate que :

- la première partie de la courbe ($\sigma_v < \sigma_{ve}$) peut être assimilée à une droite correspondant au domaine d'élasticité linéaire classique ;
- chaque retour en arrière coïncide pratiquement avec la remontée consécutive et peut être assimilé à une droite de même pente que la première partie de la courbe malgré une légère variation systématique.

Ces deux constatations bien connues justifient l'hypothèse suivante :

En chaque point de la courbe d'écrouissage et, par extension, en chaque point physiquement admissible du plan (σ_v, ϵ_v) la déformation totale ϵ_v est la somme d'une déformation irréversible ou visco-plastique ϵ_{pv} et d'une déformation élastique reliée linéairement à la contrainte (par l'intermédiaire du module d'**Young** E_v)

$$\epsilon_v = \epsilon_{ve} + \epsilon_{vp} \quad \text{(équation de partition)}$$

$$\epsilon_{ve} = \frac{\sigma_v}{E_v} \quad \text{(équation d'élasticité)}$$

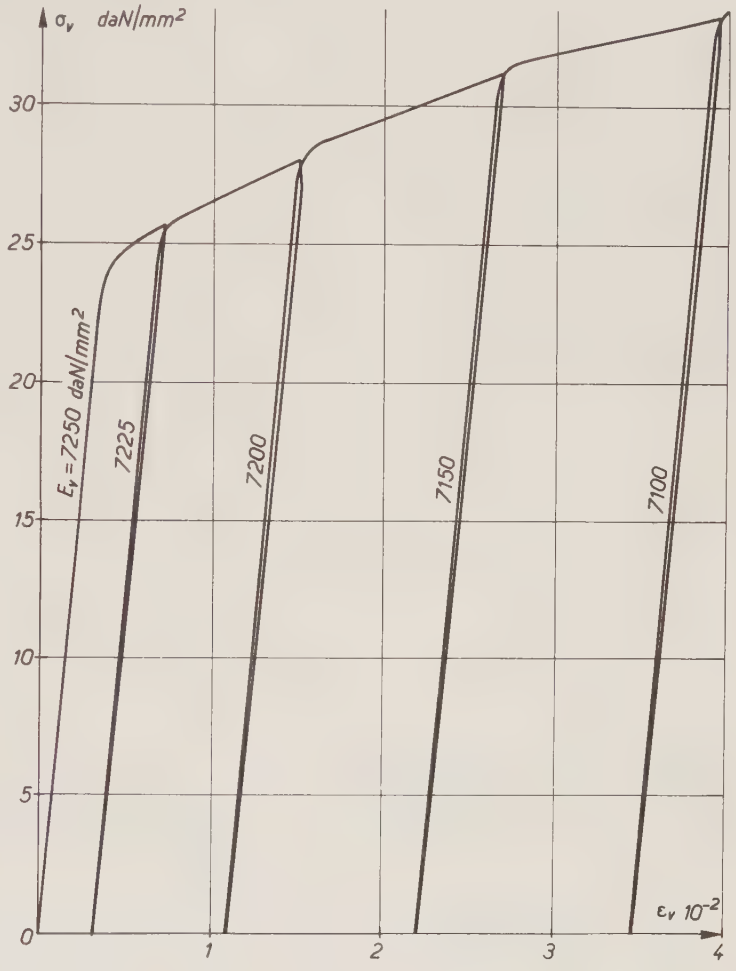


Fig. II,6 - Courbe d'écrouissage interrompue et reprise
- Duralumin AU 4 G trempé vieilli
- Température 22° C

Ce résultat classique a été justifié de plusieurs autres façons au chapitre I.

Le paramètre caché ϵ_{vp} ainsi introduit est défini par la relation

$$\epsilon_{vp} = \epsilon_v - \frac{\sigma_v}{E_v}$$

Si l'on réalise sur un lot d'éprouvettes d'un même matériau métallique stable (même coulée, même formage, même traitement thermique, même usinage) à la même température :

- une série d'essais de fluage à différentes contraintes (exemple fig. II,7),
- une série d'essais de relaxation à différentes déformations (exemple fig. II,8),
- une série d'essais d'écrouissage à différentes vitesses (exemple fig. II,9),

on peut caractériser chaque point des courbes résultats par les valeurs instantanées des trois paramètres suivants :

$$\sigma_v$$

$$\epsilon_{vp} = \epsilon_v - \frac{\sigma_v}{E_v}$$

$$\dot{\epsilon}_{vp} = \frac{d\epsilon_{vp}}{dt}$$

et l'on peut représenter l'ensemble de ces points dans le plan de phase $(\epsilon_{vp}, \dot{\epsilon}_{vp})$ comme l'indique la figure II,10.

A l'aide d'un grand nombre d'essais et dans un domaine borné des paramètres $\epsilon_{vp}\dot{\epsilon}_{vp}$, on constate que la ligne qui joint les points représentatifs d'une même contrainte σ_v, indépendamment de son appartenance à tel ou tel type d'essai, peut être assimilée à une courbe continue monotone sans point d'inflexion et ceci dans une marge de dispersion compatible avec les incertitudes de mesures estimées et les incertitudes sur l'identité des éprouvettes.

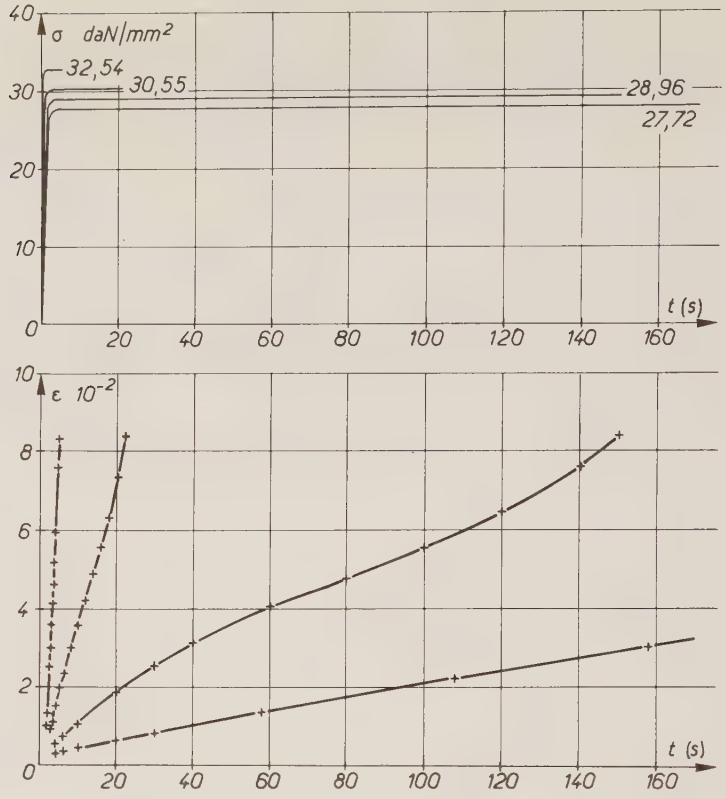


Fig. II,7 - Essais de fluage

Duralumin AU4G trempé vieilli - Température 200° C ± 0,5

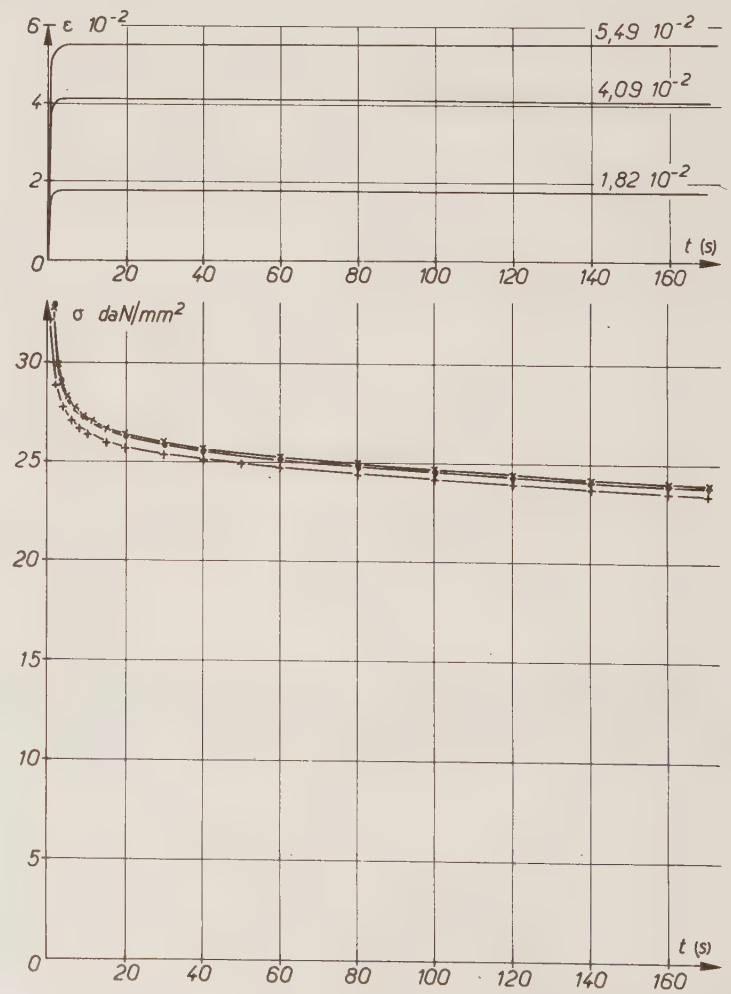


Fig. II,8 - Essais de relaxation ▶

- Duralumin AU4G trempé vieilli
- Température 200° C ± 0,5

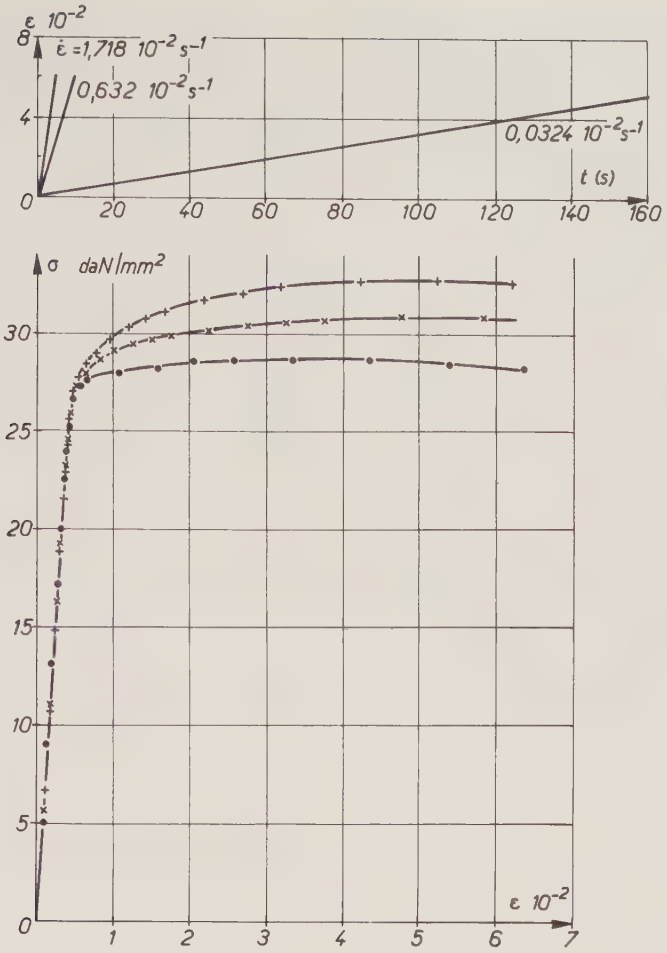


Fig. II,9 - Essais d'écrouissage
- Duralumin AU 4 G trempé vieilli
- Température 200° C ± 0,5

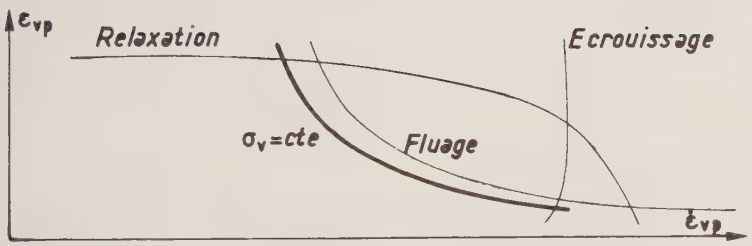


Fig. II,10 - Représentation des 3 essais de base dans le plan de phase

Il n'est malheureusement pas possible de montrer un tel graphique sur une feuille petit format mais on peut en donner une autre représentation :

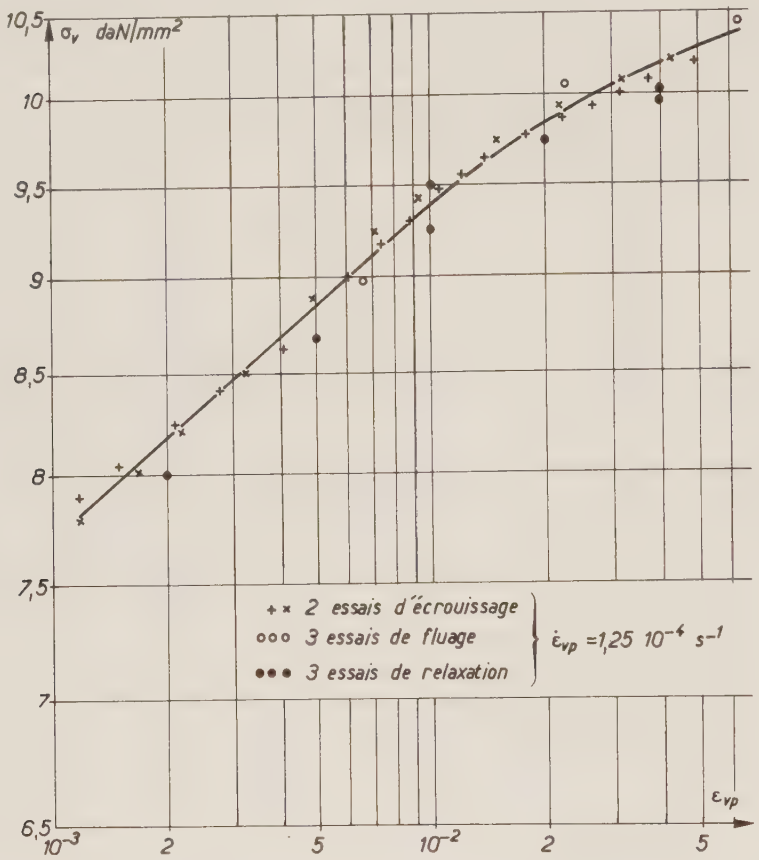
- variation de la contrainte σ_v en fonction de la déformation visco-plastique ϵ_{vp} à vitesse de déformation visco-plastique $\dot{\epsilon}_{vp}$ constante
  (exemple d'un matériau industriel fig. II,11),
- variation de σ_v en fonction de $\dot{\epsilon}_{vp}$ pour $\epsilon_{vp} = cte$
  (exemple fig. II,12).

Sur chacun des deux graphiques, une même courbe rend compte des trois types d'essais.

Ces résultats ont été obtenus pour la première fois en 1965 pour le domaine du fluage établi [40] et en 1966 pour le fluage primaire [41]. Ils ont été retrouvés depuis sur bon nombre de matériaux à différentes températures. Ils sont fondamentaux car ils prouvent qu'une loi du type :

$$\sigma_v = f_v(\epsilon_{vp}, \dot{\epsilon}_{vp})$$ (Equation de visco-plasticité)

(f_v étant une fonction analytique sur R^2 sauf éventuellement en O et en général non linéaire) rend compte en première analyse des propriétés visco-plastiques des matériaux métalliques indépendamment de l'histoire de la sollicitation. Ceci constitue une généralisation d'un certain nombre de lois proposées et une unification de lois différentes utilisées pour rendre compte des phénomènes de fluage, de relaxation et d'écrouissage considérés jusqu'alors comme différents.



◀ *Fig. II,11 - Courbe représentative de*

$\sigma_v = f_v(\epsilon_{vp}, \dot{\epsilon}_{vp} = cte)$

- Duralumin AU4G recuit
- Température 208,5° C

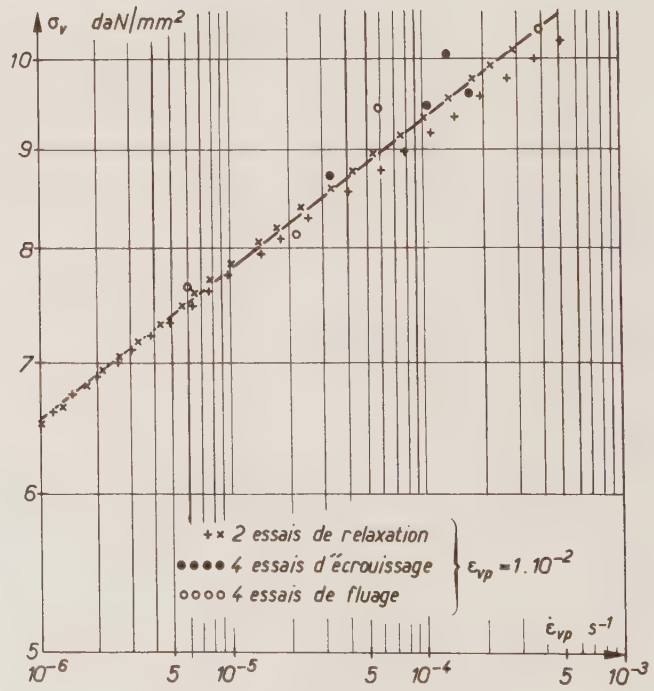


Fig. II,12 - Courbe représentative de ▶

$\sigma_v = f_v(\dot{\epsilon}_{vp}, \epsilon_{vp} = cte)$

- Duralumin AU4G recuit
- Température 208,5° C

Cette loi obtenue par des considérations semi-empiriques est néanmoins cohérente avec les résultats de physique du solide et de thermodynamique développés au chapitre I car ils ont servi de guide. Dans la mesure où l'influence de l'histoire n'est représentée que par un seul paramètre caché et où n'intervient que la valeur instantanée des 3 paramètres seulement, elle ne peut prétendre rendre compte finement de tous les phénomènes rhéologiques. Il faut la considérer comme une loi approchée dont la simplicité est dictée par le désir de l'introduire dans des calculs de résistance. Elle n'est pas générale «a priori» et avant de l'utiliser pour un matériau donné, il faut s'assurer de sa validité.

Pour utiliser cette loi de comportement dans un calcul, il est commode de lui donner une expression analytique en fonction de paramètres scalaires caractéristiques de chaque matériau dans un état donné à la température envisagée ; plusieurs formes sont possibles.

- La manière la plus objective et la plus précise d'exprimer quantitativement cette loi est sans doute de la traduire par un tableau de nombres à 3 dimensions (σ_v, ϵ_{vp}, $\dot{\epsilon}_{vp}$) qui ne suppose aucune fonction particulière. Les programmes de calcul sur ordinateur peuvent d'ailleurs facilement utiliser des données sous cette forme à condition d'avoir résolu les problèmes d'interpolation et d'existence de la solution dans le donaine des valeurs introduites.
- L'introduction d'un tableau de nombres à 3 dimensions dans un ordinateur peut poser des problèmes de capacité de mémoire, il est possible de diminuer le volume des données en particularisant la fonction de deux variables f_v sous forme d'un produit de deux fonctions d'une variable (éventuellement définies par morceaux) ; ceci restreint la généralité mais reste conforme à l'allure des courbes caractéristiques, aux résultats de **N.J. Hoff** et à un résultat de **P. Gobin**[42] obtenu sur la base de la théorie des dislocations.

$$\sigma_v = E_v \psi_v(\epsilon_{vp}) \cdot \varphi_v(\dot{\epsilon}_{vp})$$

où E_v est le module d'**Young**

ψ_v est la fonction dite «d'écrouissage» car elle caractérise le phénomène d'écrouissage :

$$\sigma_v \ (\epsilon_{vp},\ \dot{\epsilon}_{vp} = cte)$$

Elle peut être normée à 1 pour les grandes valeurs de ϵ_{vp}(domaine du fluage établi)

φ_v est la fonction dite «de viscosité» puisqu'elle caractérise la viscosité macroscopique apparente

$$\sigma_v\ (\dot{\epsilon}_{vp},\ \epsilon_{vp} = cte)$$

Les figures II,13 et II,14, II,15 et II,16 donnent des exemples concrets pour le duralumin relatif aux figures II,7, II,8, II,9 et pour un acier. Outre la confirmation de l'existence d'une loi mécanique d'état, elles montrent le caractère fortement non linéaire des phénomènes de visco-plasticité.

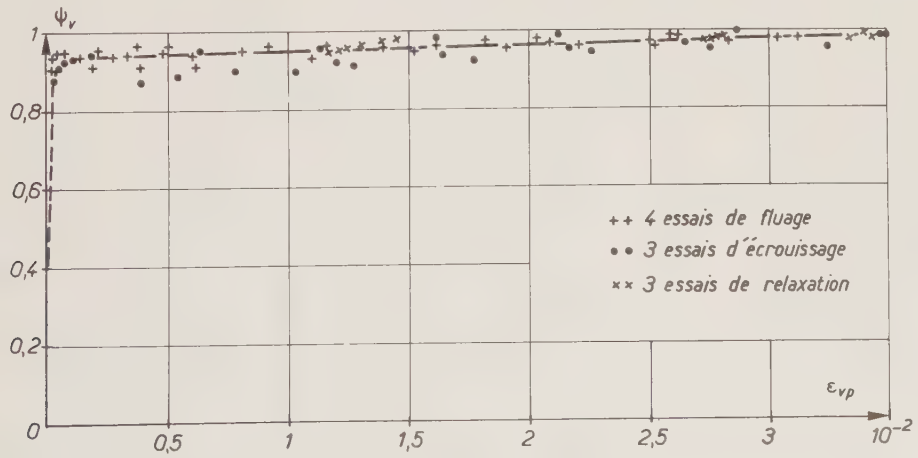


Fig. II,13 - Fonction d'écrouissage
- Duralumin trempé vieilli
- Température 200° C

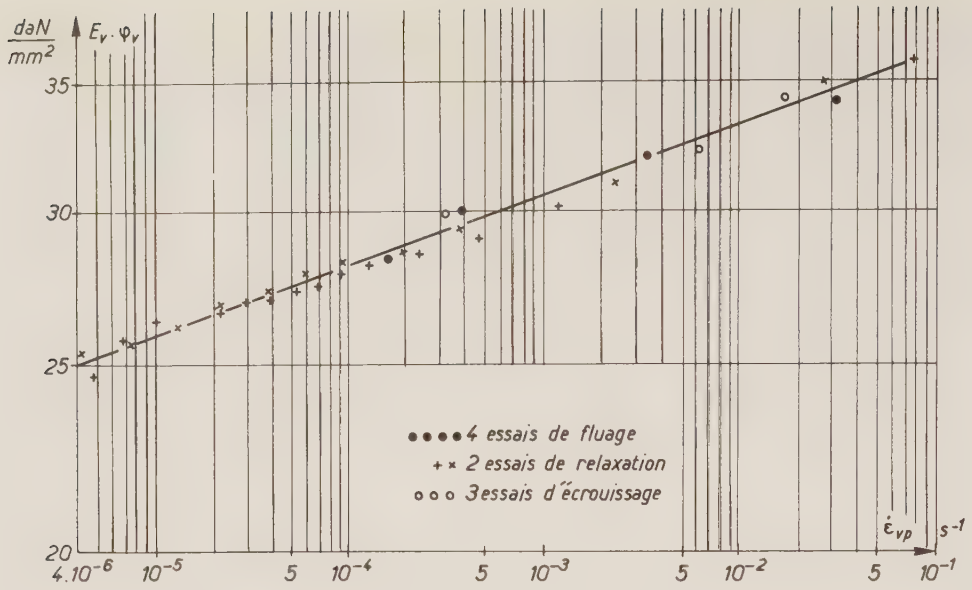


Fig. II,14 - Fonction de viscosité

Duralumin AU4G trempé vieilli - Température 200° C

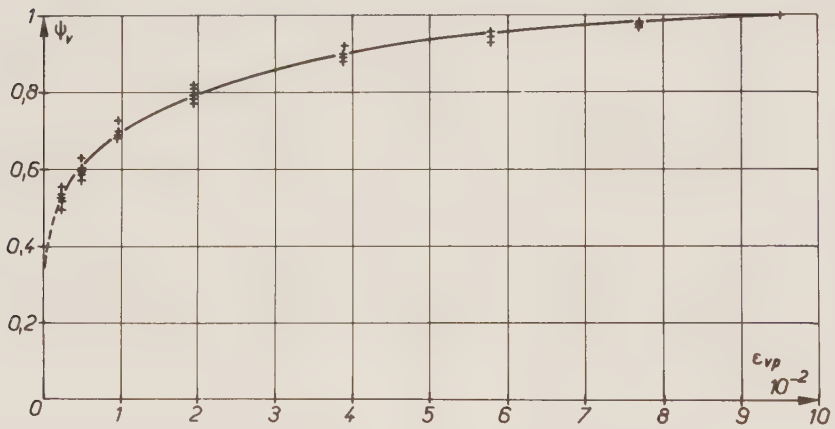


Fig. II,15 - Fonction d'écrouissage (d'après essais [31])

Acier à 0,35 % de C, recuit - Température 454° C

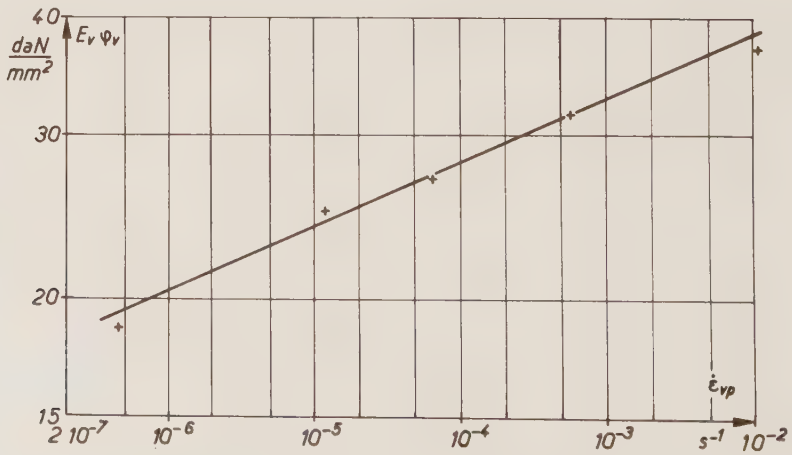


Fig. II,16 - Fonction de viscosité (d'après essais [31])

Acier à 0,35 % de C, recuit - Température 454° C

– Pour effectuer des calculs rapides dans le domaine du fluage primaire (à l'exclusion du fluage naissant), il est commode de particulariser ces deux fonctions par des fonctions de puissance :

$$\sigma_v = K_v \, \epsilon_{vp}^{\frac{1}{m_v}} \, \dot{\epsilon}_{vp}^{\frac{1}{n_v}}$$

K_v (coefficient de résistance), m_v (coefficient d'écrouissage) et n_v (coefficient de viscosité) étant des valeurs caractéristiques du matériau à la température considérée et constantes dans un petit domaine de déformation visco-plastique ϵ_{vp} . On retrouve ainsi la forme de la loi de **Norton-Nadaï-Hoff** proposée pour le fluage strict sous charge constante.

Cette loi se prête particulièrement bien aux calculs pas à pas par différences finies en écrivant :

$$\delta\epsilon_{pi} = \left[\frac{\sigma_{vi}}{K_v} \right]^{n_v} \epsilon_{vpi}^{-\frac{n_v}{m_v}} \, \delta t_i$$

avec $\epsilon_{vp\ i+1} = \epsilon_{vpi} + \delta\epsilon_{pi}$ (i étant l'indice du pas).

Dans le cas où la loi de comportement est destinée à un calcul de structure, effectué sans variation de géométrie, le même raisonnement conduit à :

$$\sigma = \frac{F}{S_o}$$

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_o} = \epsilon_e + \epsilon_p$$

$$\sigma = E\epsilon_e$$

$$\sigma = f(\epsilon_p, \dot{\epsilon}_p) = E\psi(\epsilon_p).\varphi(\dot{\epsilon}_p) = K\epsilon_p^{\frac{1}{m}} \dot{\epsilon}_p^{\frac{1}{n}}$$

E, K, m et n étant des coefficients caractéristiques peu différents de E_v, K_v, m_v, n_v

L'équivalence des phénomènes de fluage, relaxation, écrouissage dans la représentation à 3 paramètres σ_v, ϵ_{vp}, $\dot{\epsilon}_{vp}$, et la validité de la loi en chargement quelconque ont reçu de bonnes confirmations expérimentales dans les cas résumés dans le tableau de la figure II,17 et concernant surtout le fluage rapide.

Matériau	Température °C	Domaine ϵ_p	Domaine $\dot{\epsilon}_p$ s^{-1}	K Unités daN, mm, s	m	n
AU 4 G recuit	200	$0,1$ à $4\ 10^{-2}$	10^{-2} à 10^{-10}	33,35	8	25
AU 4 G trempé vieilli	21	$0,2$ à $4\ 10^{-2}$	10^{-2} à 10^{-8}	54,5	12,3	250
	130			50,2	21	50
	200			38,6	33,4	27
AU 2 GN trempé vieilli	130	$0,1$ à $2\ 10^{-2}$	10^{-3} à 10^{-11}	62	13	71
Aluminium	20	$0,01$ à $1\ 10^{-2}$	10^{-3} à 10^{-7}	14	4	35
Cuivre	20	$0,5$ à $20\ 10^{-2}$	10^{-3} à 10^{-8}	61	2	155
Plomb	24	$0,2$ à $4\ 10^{-2}$	10^{-2} à 10^{-7}	1,83	6,6	33
Acier Z 10 CNT 18	800	$0,1$ à $5\ 10^{-2}$	10^{-2} à 10^{-6}	40	6	13
Acier à 0,35 % de C	454	$0,5$ à $10\ 10^{-2}$	10^{-2} à 10^{-7}	76,2	6	15

Fig. II,17 - Tableau des vérifications de la loi $\sigma = K\epsilon_p^{\frac{1}{m}} \dot{\epsilon}_p^{\frac{1}{n}}$

La loi proposée nie en toute rigueur l'existence d'un domaine d'élasticité ($\exists \epsilon_{vp} \; \forall \sigma_v \neq 0$) mais nous verrons au paragraphe II,5.1 que cela n'est pas incompatible avec l'expérience car les fonctions ou coefficients caractéristiques sont tels que dans le domaine des faibles contraintes les déformations visco-plastiques peuvent être négligées par rapport aux déformations élastiques. Dans les calculs de structures il paraît plus simple de calculer des déformations visco-plastiques négligeables dans certains cas plutôt que d'introduire une loi possédant deux définitions selon que l'état de contrainte se situe au-dessous ou au-dessus d'un seuil d'ailleurs bien difficile à définir numériquement.

Le formalisme utilisé ici peut être appliqué à l'étude des matériaux synthétiques («matières plastiques») [43] mais il conduit à des formes de lois différentes puisque ces matériaux sont essentiellement visco-élastiques et éventuellement visco-plastiques. Dans la pratique, la visco-élasticité (linéaire ou non) suffit à décrire le comportement de ces matériaux en vue des calculs de résistance. Les coefficients ou fonctions caractéristiques sont avantageusement déterminés par les procédés de la méthode globale décrits ici.

II,2.1.2. Problème des retours en arrière

Il s'agit d'une question délicate souvent éludée dans les publications par la phrase rituelle «tout retour en arrière est exclu». Dans la pratique, les programmes de charge réels peuvent engendrer des diminutions de contrainte ou de déformations dont il faut prévoir les conséquences par des calculs.

Dans le cas unidimensionnel, on dit classiquement qu'il y a retour en arrière si la vitesse de déformation totale $\dot{\epsilon}_v$ change de signe (fig. II,18).

Cette définition englobe, en fait, deux cas qu'il faut distinguer :

- la décharge (①) qui correspond au changement de signe de $\dot{\epsilon}_v$ mais non au changement de signe de la vitesse de déformation visco-plastique

- le retour en arrière visco-plastique proprement dit (②) qui correspond au changement de signe de $\dot{\epsilon}_{vp}$ et dans lequel on peut considérer qu'il y a changement de sens des glissements dans les plans cristallographiques.

Nous nous limitons à l'étude du cas quasi-statique.

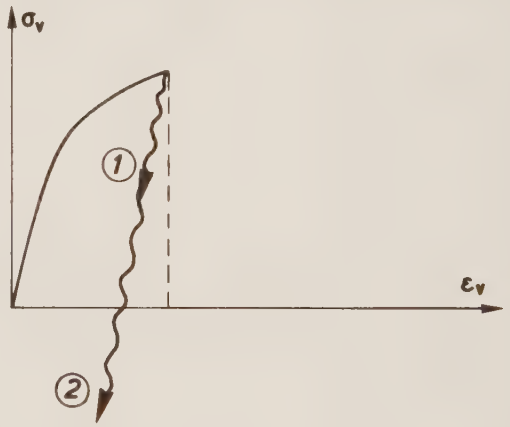


Fig. II,18 - Retours en arrière après écrouissage

En plasticité, la notion de surface de charge [44] résout le problème puisque le comportement est purement élastique si le point figuratif du chargement est situé à l'intérieur de cette surface quel que soit l'état antérieur.

En visco-plasticité (absence de surface de charge au sens de l'équilibre) le problème est de savoir comment évolue la déformation visco-plastique pendant et après le retour en arrière. Très peu de travaux ont été effectués sur la question et seulement une ébauche de réponse est proposée par la méthode globale.

Quelques constatations expérimentales vont permettre l'extension de la validité de la loi de comportement au cas de la décharge, et l'on postulera l'existence d'un paramètre de cumulation d'écrouissage pour rendre compte des retours en arrière visco-plastiques. La validité de ce paramètre sera étudiée dans une application tridimensionnelle au chapitre III.

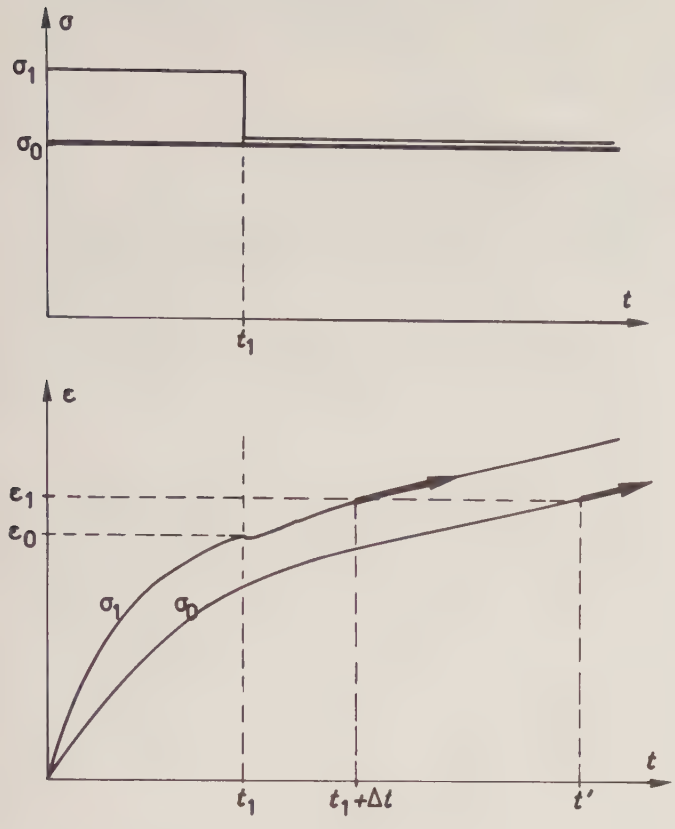
– Essais de fluage en traction simple avec retours en arrière par décharge.

Un premier essai de fluage normal, de référence, est effectué à la contrainte σ_0 .

Un deuxième essai est effectué sous une contrainte σ_1 , ($\sigma_1 > \sigma_0$), ramenée à la valeur σ_0 à l'instant $t = t_1$ et maintenue constante (fig. II,19).

Pour $t = t_1 + \Delta t$, on constate que la vitesse $\dot{\epsilon}(t + \Delta t) = \dot{\epsilon}_p(t + \Delta t)$ dans ce deuxième essai est sensiblement égale à la vitesse $\dot{\epsilon}(t') = \dot{\epsilon}_p(t')$ correspondant à la même valeur de la déformation ϵ_1 dans le premier essai. La figure II,20 montre le résultat de couples d'essais dans le plan $(\sigma , \dot{\epsilon}_p)$ correspondant à une même valeur de la déformation visco-plastique mais à des valeurs différentes de la contrainte de référence σ_0 : à la dispersion près, et dans un but pratique, on peut considérer que les essais de référence et les essais avec retours en arrière donnent la même courbe de viscosité

$$\exists \dot{\epsilon}_p (\epsilon_p , \sigma , t > t_1 + \Delta t) \; \forall \sigma (t < t_1)$$



◀ *Fig. II,19 - Essais de fluage avec retour en arrière par décharge*

La valeur de Δt est choisie suffisamment grande pour que le phénomène d'« hésitation au fluage » soit terminé. Ce phénomène qui semble n'avoir une importancesignificative qu'aux faibles températures [45] sera négligé dans la suite.

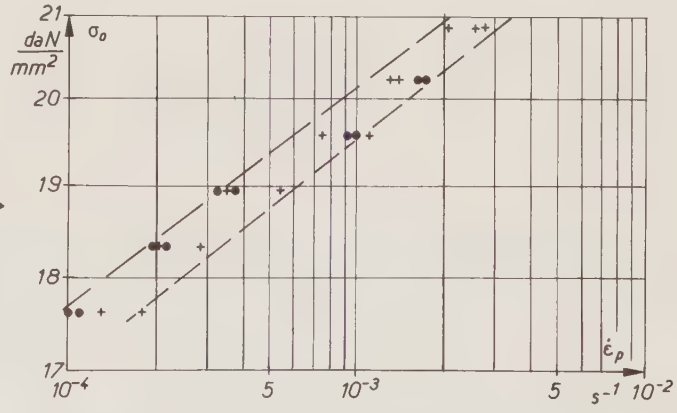


Fig. II,20 - Résultats de fluage avec retours en arrière ▶
Duralumin AG 3, température 150° C
++ Vitesse $\dot{\epsilon}_p$ pour une déformation $\epsilon_1 = 14{,}4\ 10^{-2}$ dans des essais à σ_0 = cte
●● Vitesse $\dot{\epsilon}_p$ pour une déformation $\epsilon_1 = 14{,}4\ 10^{-2}$ dans des essais à $\sigma_1 = 20{,}85$ daN/mm² jusqu'à $\epsilon_0 = 12.10^{-2}$ puis à σ_0 pour $\epsilon > 12\ 10^{-2}$

– Essais d'écrouissage en traction simple avec retours en arrière par décharge.

Une série d'essais basés sur le même principe a été réalisée en écrouissage.
Un essai de référence est réalisé à la vitesse $\dot{\epsilon}_0$
Un deuxième essai est réalisé à la vitesse $\dot{\epsilon}_1$, $(\dot{\epsilon}_1 > \dot{\epsilon}_0)$ jusqu'à une déformation ϵ_1 à partir de laquelle la vitesse est ramenée à la valeur $\dot{\epsilon}_0$ (fig. II,21).

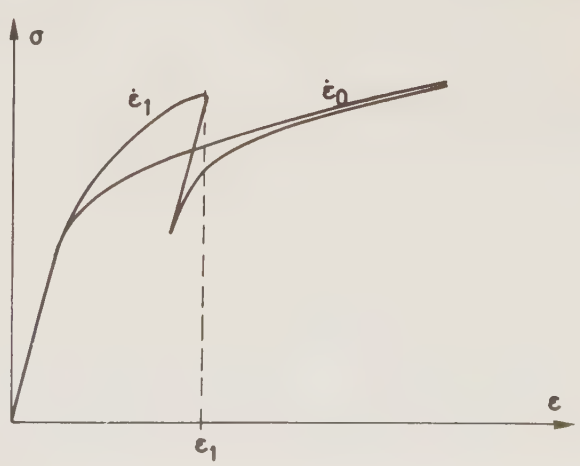


Fig. II,21 - Essais d'écrouissage avec retour en arrière par décharge ▶

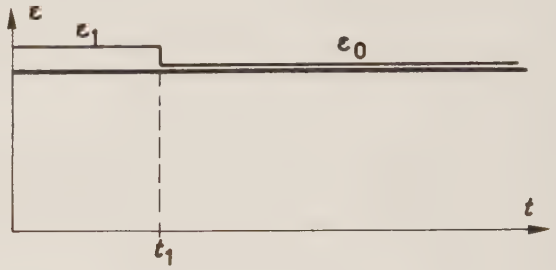
Quelques résultats partiels montrent que les courbes sont pratiquement confondues pour $\epsilon > \epsilon_1$ si l'on excepte une petite zone au voisinage de ϵ_1 :

$$\exists \sigma (\dot{\epsilon}, \epsilon > \epsilon_1) \ \forall \ \dot{\epsilon} (\epsilon < \epsilon_1)$$

– Essais de relaxation en traction simple avec retours en arrière par décharge.

En relaxation, la conclusion est analogue mais les résultats expérimentaux ne sont pas très significatifs car la faible différence possible des déformations $\epsilon_1 - \epsilon_0$ fait que pratiquement les courbes $\sigma (t)$ sont confondues pour $t > t_1$ (fig. II,22)

$$\exists \dot{\sigma} (\sigma, t > t_1) \ \forall \ \epsilon (t < t_1)$$



Avec les équations :

$$\sigma_v = \sigma \left[1 + \epsilon \right]$$
$$\epsilon_v = \text{Log} \left[1 + \epsilon \right]$$
$$\epsilon_v = \epsilon_{ve} + \epsilon_{vp}$$
$$\sigma_v = E_v \epsilon_{ve}$$

on peut généraliser les trois résultats précédents pour tout cas de traction par la proposition suivante :

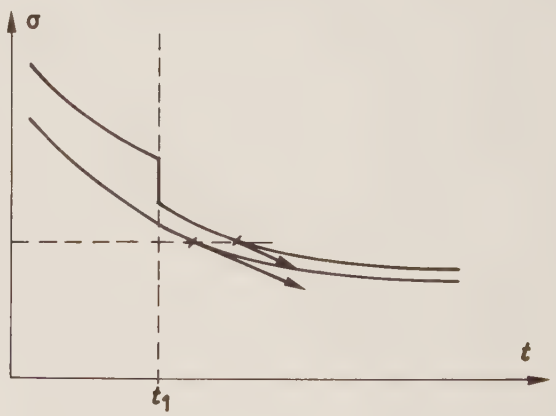


Fig. II,22 - Retour en arrière traction-compression

$$\exists \dot{\epsilon}_{vp} (\sigma_v, \epsilon_{vp}, t^*) \ \forall \ \sigma_v (t < t^*)$$

Ce résultat étend au cas des retours en arrière par décharge la traduction de l'histoire par le seul paramètre ϵ_{vp}, mais il ne repose que sur un nombre restreint d'expériences qui doivent être complétées et, là encore, il s'agit d'une schématisation sans doute assez grossière de la réalité.

Pour être complet il faut envisager les retours en arrière visco-plastiques (changement de signe de la vitesse de déformation visco-plastique $\dot{\epsilon}_{vp}$).

C'est le cas, par exemple, d'une compression faisant suite à une traction (fig. II,23).

Le paramètre ϵ_{vp}, caractéristique de l'écrouissage sans retour en arrière ne peut caractériser l'écrouissage avec retour en arrière visco-plastique. Par exemple, après un ou plusieurs cycles de contrainte en traction-compression, un certain état d'écrouissage subsiste même si la valeur finale de ϵ_{vp} est égale à la valeur initiale [46]. Il faut un paramètre de cumulation indépendant du signe de la variation de ϵ_{vp}. Dans l'hypothèse de l'écrouissage isotrope [47], ce qui revient à négliger l'effet de **Bauschinger**, on peut envisager l'une des possibilités les plus

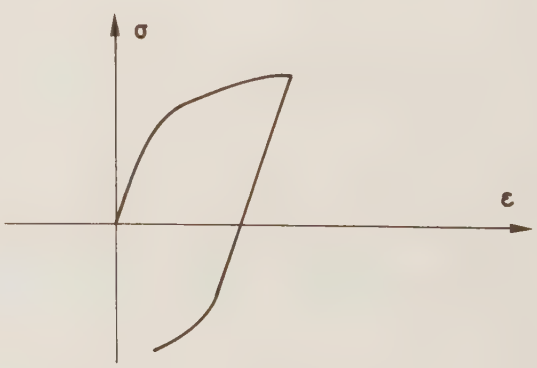


Fig. II,23 - Retour en arrière traction-compression

simples :

L'écrouissage est caractérisé par le paramètre

ou
$$\tilde{\epsilon}_{vp} = \int | d\epsilon_{vp} |$$

$$\boxed{\tilde{\epsilon}_{vp}(t, t_o) = \int_{t_o}^{t} | \dot{\epsilon}_{vp} | \, dt}$$

ce qui signifie que la variation d'écrouissage ne dépend que de la valeur absolue de la variation de déformation visco-plastique.

Ce paramètre de cumulation, introduit en 1970 [48] ne change pas la forme de la loi en traction simple puisque dans ce cas :

$$\tilde{\epsilon}_{vp} \equiv \epsilon_{vp}$$

Aucune justification expérimentale directe ne vient étayer cette hypothèse car la réalisation d'essais de fluage en traction puis compression est très délicate, voire impossible, avec précision. Néanmoins, ses applications au calcul de l'amortissement interne (paragraphe II,5.2) et au calcul d'un cylindre en chargement complexe, utilisant une généralisation, au cas tridimensionnel, de $\tilde{\epsilon}_{vp}$ (paragraphe III,4), constituent des vérifications indirectes probantes.

Nous considérons désormais que la loi de comportement suivante est valable pour tout type de chargement :

$$\epsilon_v = \epsilon_{ve} + \epsilon_{vp}$$

$$\sigma_v = E_v \epsilon_{ve}$$

$$\sigma_v = f_v(\tilde{\epsilon}_{vp}, \dot{\epsilon}_{vp})$$

avec $\tilde{\epsilon}_{vp}(t, t_o) = \int_{t_o}^{t} | \dot{\epsilon}_{vp} | \, dt$

Dans le cas d'une évolution d'écrouissage en traction puis compression, d'après cette loi (fig. II,24), la courbe de compression $P_2 P_3$ est symétrique, par rapport à P_1, de la courbe de traction $P_4 P_5$ qui aurait existé si la courbe de traction OP_4 avait été poursuivie ($OP_4 P_5$)

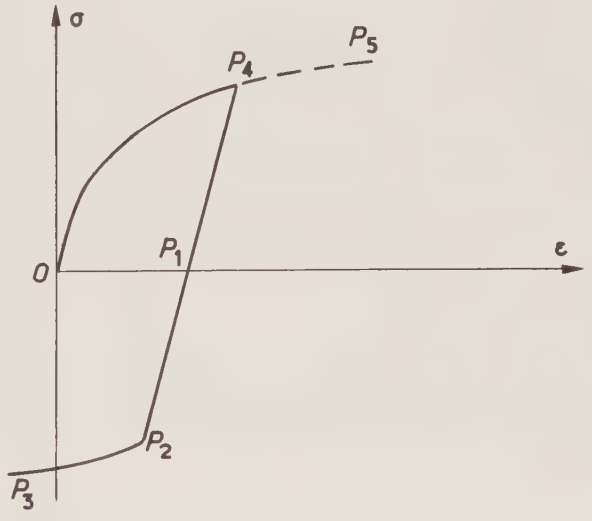


Fig. II,24 - Evolution de traction puis compression en écrouissage isotrope

II,2.1.3. Cas des charges rapidement variables

Dans les diverses vérifications faites à propos de la loi $\sigma_v = f_v(\epsilon_{vp}, \dot{\epsilon}_{vp})$ et d'autres du même type, on remarque que les différences entre théorie et expérience sont d'autant plus importantes que les phénomènes sont plus rapides [49]. Sans aborder l'étude des chocs, il existe un domaine qui déborde le cadre des phénomènes quasi-statiques et qui intéresse les applications industrielles. Dans la mesure où l'on veut garder une loi définie par les valeurs instantanées de paramètres pour rendre compte des phénomènes rapides, on peut essayer d'introduire le paramètre vitesse de contrainte $\dot{\sigma}_v$ comme il a été dit au chapitre I.

On a tenté de mettre en évidence l'influence de ce paramètre de la manière expérimentale suivante :

Considérant que, dans le cas isotherme, les phénomènes dépendent des quatre paramètres σ_v , ϵ_{vp} , $\dot{\epsilon}_{vp}$, $\dot{\sigma}_v$, on compare les vitesses de déformation visco-plastique correspondant aux états 0 et $*$, ne différant que par $\dot{\sigma}_v$ et définis comme suit :

$$\text{état } 0 : \dot{\epsilon}_{vpo} \begin{cases} \sigma_{vo} \\ \epsilon_{vpo} \\ \dot{\sigma}_v = 0 \end{cases} \qquad \text{état } * : \dot{\epsilon}_{vp}^* \begin{cases} \sigma_v^* = \sigma_{vo} \\ \epsilon_{vp}^* = \epsilon_{vpo} \\ \dot{\sigma}_v^* \neq 0 \end{cases}$$

Pour diminuer l'influence de la dispersion qui pourrait masquer cet effet du second ordre, ces deux états sont réalisés lors d'un même essai de fluage au cours duquel des fluctuations de charge sont provoquées comme l'indique la figure II,25.

Un essai de fluage isotherme est conduit de manière classique entre les instants $t = 0$ et $t = t_1$ où la contrainte est constante : σ_0. L'évolution de la déformation visco-plastique ($\epsilon_{vp} = \epsilon_v - \frac{\sigma_v}{E_v}$) est tracée en fonction du temps.

Entre les instants t_1 et t_2 , un cycle de charge est réalisé selon le diagramme de la figure II,25.

La déformation visco-plastique évolue comme l'indique le diagramme inférieur.

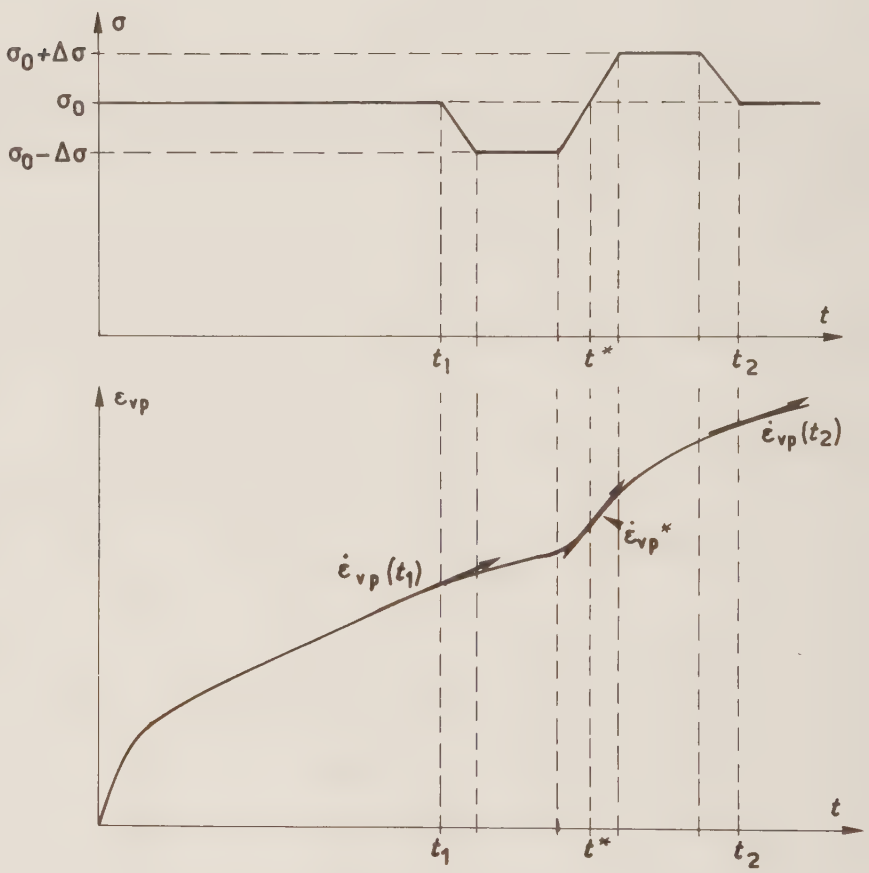


Fig. II,25 - Essai de fluage avec cycle de charge

Considérons l'instant t^* où $\sigma = \sigma_0$; les différents paramètres ont pour valeur :

$$\begin{cases} \sigma_v(t^*) = \sigma_v^* = \sigma_0 \left[1 + \epsilon^* \right] \\ \epsilon_{vp}(t^*) = \epsilon_{vp}^* = \epsilon_v - \frac{\sigma_v^*}{E_v} \\ \dot{\epsilon}_{vp}(t^*) = \dot{\epsilon}_{vp}^* = \frac{d\epsilon_{vp}}{dt} \quad (t = t^*) \\ \dot{\sigma}_v(t^*) = \dot{\sigma}_v^* = \frac{d\sigma_v}{dt} \quad (t = t^*) \end{cases}$$

L'expérience montre que si l'intervalle de temps $\left[t_2 - t_1 \right]$ est petit devant le temps total de l'expérience, la vitesse $\dot{\epsilon}_{vp}$ ($t_1 -$) correspondant à un temps voisin mais inférieur à t_1 diffère très peu de la vitesse $\dot{\epsilon}_{vp}$ ($t_2 +$) correspondant à un temps voisin mais supérieur à t_2 . Par conséquent, la vitesse $\dot{\epsilon}_{vpo}$ correspondant à l'instant t^* dans un essai de fluage continu sans cycle ($\dot{\sigma}_v(t^*) = 0$) ne peut être que

voisine de $\dot{\epsilon}_{vp}(t_1-)$ et de $\dot{\epsilon}_{vp}(t_2+)$:

$$\dot{\epsilon}_{vp}(t_1-) \neq \dot{\epsilon}_{vpo} \neq \dot{\epsilon}_{vp}(t_2+)$$

L'état de référence 0 est alors défini par :

$$\begin{cases} \sigma_{vo} = \sigma_v^* \\ \epsilon_{vpo} \neq \epsilon_{vp}^* \\ \dot{\epsilon}_{vpo} \neq \dot{\epsilon}_{vp}(t_1-) \neq \dot{\epsilon}_{vp}(t_2+) \\ \dot{\sigma}_{vo} = 0 \end{cases}$$

Pour une variation de contrainte $\Delta\sigma$ petite devant σ_0 , la loi de comportement $\sigma_v = f(\epsilon_{vp}, \dot{\epsilon}_{vp})$ étant supposée valable en retours en arrière dans le cas quasi-statique, si la vitesse de contrainte $\dot{\sigma}_v$ n'est pas trop élevée pour que l'on puisse négliger les effets d'inertie, toute différence entre $\dot{\epsilon}_{vp}^*$ correspondant à $\dot{\sigma}_v \neq 0$ et $\dot{\epsilon}_{vpo}$ correspondant à $\dot{\sigma}_v = 0$ doit être attribuée à $\dot{\sigma}_v$.

La figure II,26 montre un exemple de résultats obtenus par cette méthode. Il est possible d'effectuer une dizaine de cycles par expérience de fluage et malgré cela la dispersion est élevée car il s'agit d'essais particulièrement délicats à réaliser et à dépouiller. Néanmoins, sur le plan qualitatif, l'influence est nette puisque le rapport $\frac{\dot{\epsilon}_{vp}^*}{\dot{\epsilon}_{vpo}}$ peut atteindre des valeurs de 5 à 8 mais il ne faut attribuer aucune valeur quantitative à ce résultat qui, traduit en contrainte, correspond à une différence relative

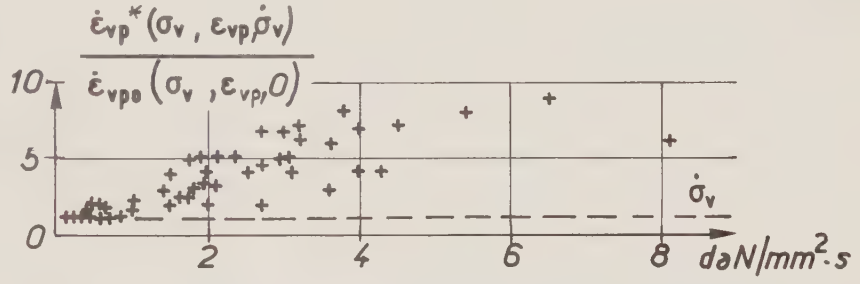


Fig. II,26 - Influence de la vitesse de contrainte sur la vitesse de déformation visco-plastique
- Duralumin AU2GN trempé vieilli
- Température 130° C

$$\frac{\sigma_v(\dot{\sigma}_v \neq 0, \ldots) - \sigma_v(\dot{\sigma}_v = 0, \ldots)}{\sigma_v(\dot{\sigma}_v = 0, \ldots)}$$

de l'ordre de 5 à 6,5 %.

Plutôt que d'essayer d'incorporer ce paramètre dans la loi, ce qui compliquerait les calculs pour des effets appréciables relativement rares dans la pratique, nous proposons de l'introduire comme paramètre d'un terme correctif moyen sur la vitesse de déformation visco-plastique ou sur la contrainte :

$$\boxed{\dot{\epsilon}_{vp}(\sigma_v, \epsilon_{vp}, \dot{\sigma}) = \dot{\epsilon}_{vp}(\sigma_v, \epsilon_{vp}) \cdot \eta_v(\dot{\sigma}_v)}$$

Ce nouveau paramètre déjà introduit implicitement dans un travail de **S. Taira** et **K. Tanaka** [50] permet de rendre compte en partie (au moins qualitativement) des phénomènes accompagnant le fluage périodique [51] et le fluage par paliers que certains auteurs ont pu traduire par l'introduction du paramètre énergie de déformation visco-plastique [52] :

$$W_p(t) = \int_0^t \sigma \, d\epsilon_p$$

d'après des considérations thermodynamiques.

Il faut souligner que cette étude de l'influence de $\dot{\sigma}$ ne constitue qu'un coup de sonde destiné à mettre en évidence le phénomène et à dégager une méthode qui n'est encore qu'esquissée. Dans le cas particulier étudié, le domaine qui relève du «cas des charges rapidement variables» peut être défini par $\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} > 0{,}1.s^{-1}$

II,2.1.4. Problème de la température

L'introduction du paramètre température dans les lois de comportement se heurte à des difficultés théoriques qui n'ont été résolues par la thermodynamique que pour de faibles écarts des variables par rapport à des états de pseudo-équilibre [53]. Pour les matériaux métalliques, il semble qu'une des seules voies ayant abouti

à des résultats exploitables dans la pratique est celle proposée par **Dorn** [54] : le fluage est considéré comme un phénomène thermiquement activé, et, en partant de la théorie d'**Arrhénius** et de quelques hypothèses simplificatrices, on démontre facilement que la vitesse de déformation visco-plastique dépend de la température T°K par l'intermédiaire de la relation :

$$\dot{\epsilon}_{vp} = g_{DV}(\sigma_v \ \ldots\ ) . e^{-\frac{\Delta H}{RT}}$$

où ΔH est l'énergie d'activation liée au processus de fluage

R est la constante des gaz parfaits.

En fait, l'énergie d'activation ΔH varie avec la température et la contrainte (comme l'indique la fig. II,27) et peut être avec d'autres paramètres, si bien que l'application de la loi de **Dorn** doit être restreinte aux cas de faibles variations de température par rapport à une température de référence.

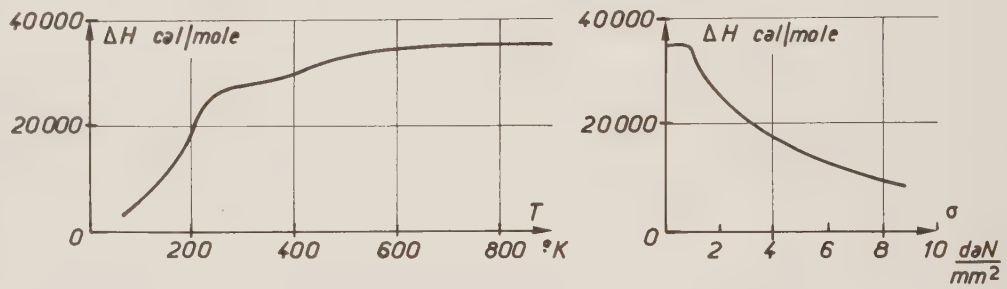


Fig. II,27 - Variation de l'énergie d'activation en fonction de la température et de la contrainte (d'après DORN, [36]).
Aluminium

La manière globale la plus simple de traduire, en première approximation, l'effet de la température sur le comportement visco-plastique est d'exprimer, en fonction de la température, les fonctions ou coefficients caractéristiques déterminés par des expériences isothermes.
La figure II,28 montre à titre d'exemple, dans un cas concret, l'évolution des coefficients caractéristiques K, m et n en fonction de la température. Ceci suppose qu'un phénomène thermique dynamique puisse être représenté par une succession d'états thermiques statiques, ou bien que l'on puisse introduire un paramètre qui rende compte de l'évolution.

D'une étude thermodynamique de **J.C. Halley** déjà citée en référence [14] au paragraphe I,3.2, il est possible de tirer une loi de comportement unidimensionnelle différentielle valable pour les matériaux élasto-visco-plastiques vérifiant la loi de thermo-élasticité linéaire et la loi de **Fourier** :

$$d\sigma = F_1\, d\epsilon_p + F_2\, d\dot{\epsilon}_p - F_3\, dT - F_4\, d\dot{T}$$

où F_1, F_2, F_3, F_4 sont des coefficients dépendant de l'état rhéologique à l'instant t .

Le point nouveau est l'introduction du paramètre $\dot{T}$ [55].

Pour mettre en évidence l'effet de ce paramètre, on peut procéder d'une manière analogue à celle utilisée pour le paramètre $\dot{\sigma}$ au paragraphe II,2.1.3. On compare les contraintes correspondant à des états définis deux à deux par :

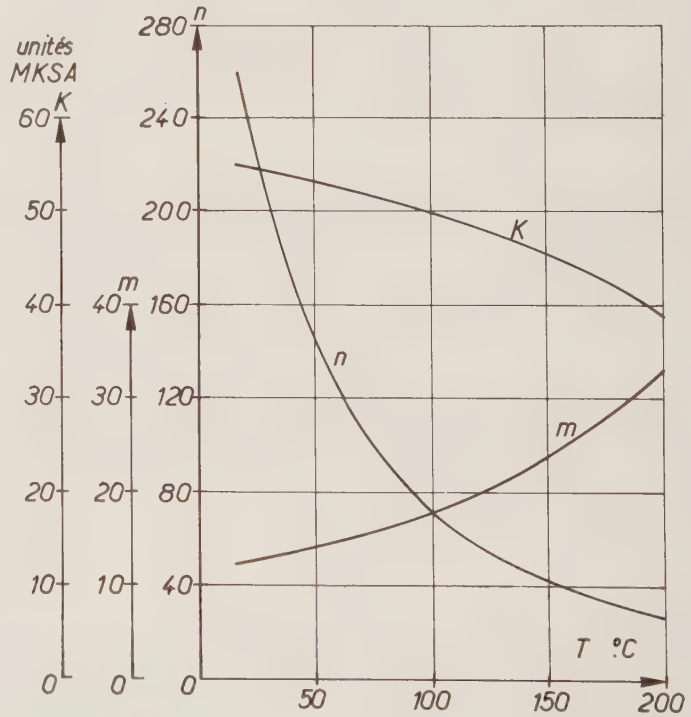


Fig. II,28 - Evolution des coefficients de visco-plasticité en fonction de la température.
Duralumin AU4G trempé-vieilli

$$\text{état } 0 : \sigma_{v0} \begin{cases} \epsilon_{vp0} \\ \dot{\epsilon}_{vp0} \\ T_0 \\ \dot{T} = 0 \end{cases} \qquad \text{état } * : \sigma_v^* \begin{cases} \epsilon_{vp}^* = \epsilon_{p0} \\ \dot{\epsilon}_{vp}^* = \dot{\epsilon}_{vp0} \\ T^* = T_0 \\ \dot{T}^* \neq 0 \end{cases}$$

Pour cela, des expériences d'écrouissage à vitesse constante ont été réalisées sur une machine de traction possédant un dispositif de chauffage par effet **Joule** qui permet d'atteindre des augmentations de température extrêmement rapides et homogènes [56] ; le refroidissement s'effectue par conduction et rayonnement naturels.

Le principe de l'expérience est représenté sur la figure II,29.

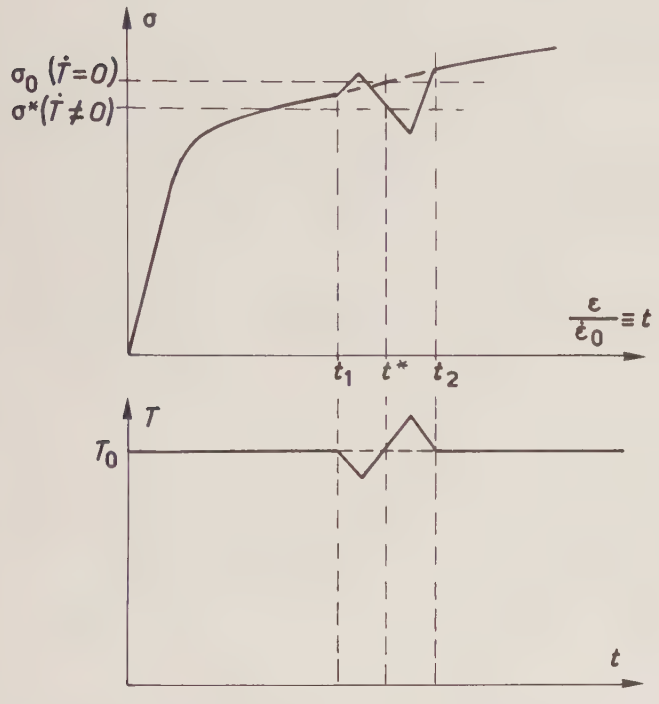


Fig. II,29 - Essai d'écrouissage avec cycle de température

L'essai d'écrouissage se déroule à température constante sauf entre les instants t_1 et t_2 où un cycle de température est imposé. Au temps t^* caractérisé par $T = T_0$ la contrainte $\sigma = \sigma_0$ correspondant à l'état 0 est obtenue par interpolation de la courbe d'écrouissage entre les instants t_1 et t_2 . D'autre part, à ce même temps t^* on a :

$$\epsilon^* = \epsilon_0 \quad \text{d'où} \quad \epsilon_{vp}^* \# \epsilon_{vp0}$$

si l'on opère sur des déformations assez grandes

$$T^* = T_0$$

$$\dot{T}^* \neq 0$$

$$\dot{\epsilon}_{vp}^* \simeq \dot{\epsilon}_{vp0}$$

Au dépouillement, on vérifie que cette approximation n'entraîne pas, sur la contrainte, une erreur supérieure à 1 %. On vérifie d'autre part que $\text{grad}\,(T) \simeq 0$ et que les vitesses $\dot{\sigma}$ restent dans le domaine des valeurs où l'on peut négliger leur effet d'après l'étude du paragraphe II,2.1.3. D'où la contrainte :

$$\sigma_v^* = \sigma_v \ (t = t^*)$$

correspondant à l'état * .

La figure II,30 montre les variations du rapport :

$$\frac{\sigma_v^*}{\sigma_{v0}} = \frac{\sigma_v \ (\epsilon_{vp}, \dot{\epsilon}_{vp}, T, \dot{T})}{\sigma_v \ (\epsilon_{vp}, \dot{\epsilon}_{vp}, T, 0)}$$

en fonction de la vitesse de température, pour trois matériaux. Malgré la dispersion assez importante ($\frac{\sigma_v^*}{\sigma_{v0}}$ est le rapport de deux grandeurs expérimentales voisines) l'effet est net puisqu'il est de l'ordre de 5 % pour des vitesses $\dot{T}$ de 50° / s.

Bien que le nombre d'expériences soit limité, on peut conclure qu'il paraît nécessaire d'envisager d'introduire ce paramètre $\dot{T}$ dans les problèmes liés aux chocs thermiques. De toute façon, nous avons là :

– une loi qui rend compte des phénomènes visco-plastiques sous température rapidement variable :

$$\sigma_v = f_v \ (\epsilon_{vp}, \dot{\epsilon}_{vp}, \dot{\sigma}_v, T, \dot{T})$$

– un moyen de déterminer dans chaque cas particulier si l'on peut ou non négliger l'influence de la vitesse de température $\dot{T}$

– l'ébauche d'une méthode de détermination de l'effet quantitatif de ce paramètre que nous proposons là encore d'introduire sous forme de terme correctif moyen sur la contrainte ζ_v ou sur la vitesse de déformation visco-plastique :

$$\sigma_v(\epsilon_{vp}, \dot{\epsilon}_{vp}, T, \dot{T}) = \sigma_v(\epsilon_{vp}, \dot{\epsilon}_{vp}, T).\ \zeta_v(\dot{T})$$

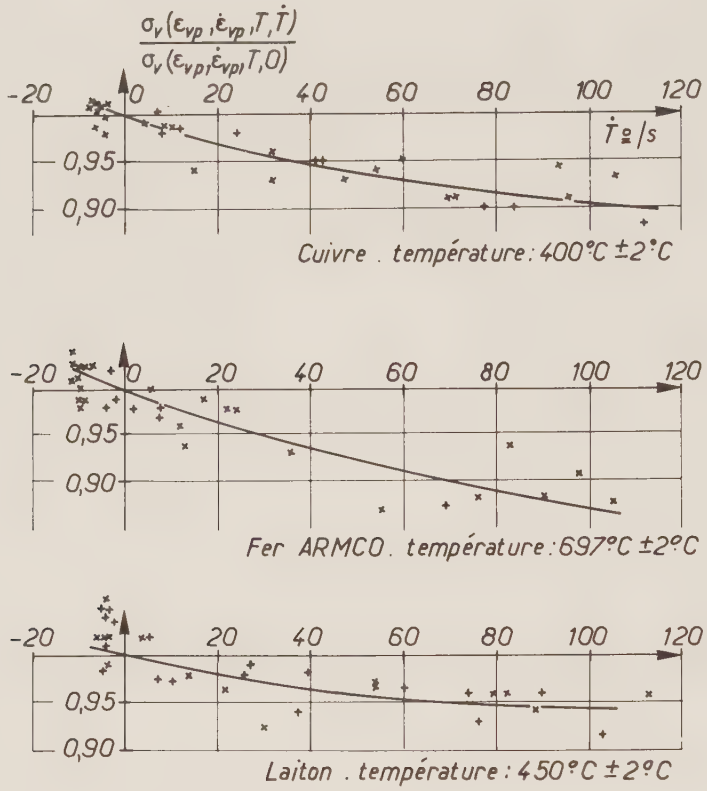


Fig. II,30 - Influence de la vitesse de température sur la contrainte

Les applications du paragraphe II,5.4 (fig. II,50, II,51, II,52) constituent des exemples de visco-plasticité non isotherme dans lesquels l'effet de la vitesse $\dot{T}$ peut être négligé.

II,2.2. Cas des matériaux non stables

L'instabilité des matériaux, considérée du point de vue physique, se traduit par une variation, dans le temps, des caractéristiques mécaniques en l'absence de sollicitation. Comme il a été dit au paragraphe II,2.1, la plupart des matériaux de construction peuvent être considérés comme stables pour des temps courts mais dans certains cas où les temps d'utilisation sont très longs, il faut prendre en compte cette instabilité.

Cette propriété a des causes physiques multiples, notre but n'est pas de les étudier mais de les traduire globalement et simplement dans la loi de comportement.

Le désir d'aboutir à des lois de comportement exploitables nous oblige à faire l'hypothèse restrictive suivante :

L'évolution du matériau est indépendante des phénomènes rhéologiques, c'est-à-dire que les phénomènes de visco-plasticité s'appliquent à un matériau dont la variation des propriétés n'est fonction que du seul paramètre temps.

Il est commode d'introduire une deuxième variable temps qui caractérise l'âge du matériau par rapport à un temps de référence : soit τ. Par la méthode globale exposée au paragraphe II,2.1.1, il est possible de déterminer la loi de comportement pour diverses valeurs τ_i de l'âge du matériau (en négligeant l'évolution du matériau pendant le temps correspondant aux temps d'essais) :

$$\epsilon_v = \epsilon_{ve} + \epsilon_{vp}$$

$$\sigma_v = E_v(\tau_i)\,\epsilon_{ve}$$

$$\sigma_v = f_{v\tau_i}(\epsilon_{vp}, \dot{\epsilon}_{vp})$$

L'hypothèse adoptée permet de considérer que la loi de comportement du matériau en évolution coïncide pour $\tau = \tau_i$ avec la loi ainsi déterminée,

d'où

$$\epsilon_v = \epsilon_{ve} + \epsilon_{vp}$$

$$\sigma_v = E_v(\tau)\,\epsilon_{ve}$$

$$\sigma_v = f_v(\tau, \epsilon_{vp}, \dot{\epsilon}_{vp})$$

On généralise ainsi une théorie proposée par **N.K. Arutyunyan** [57] pour traduire le fluage des bétons compte tenu de leur vieillissement.

Que l'on traduise l'instabilité de cette manière, ou par des paramètres d'équivalence basés sur les théories d'évolution des processus chimiques comme ont pu le faire certains auteurs [58], le paramètre temps (âge) intervient explicitement, ce qui peut poser des problèmes d'ordre théorique puisque le principe d'objectivité n'est plus vérifié.

Quoi qu'il en soit, il ne semble pas que des lois dans lesquelles les fonctions ou coefficients varient avec le temps posent de problèmes d'exploitation dans la mesure où l'on peut les faire varier de manière discrète :

– à chaque pas dans les calculs pas à pas sur ordinateurs

– pour quelques valeurs τ_i de l'âge du matériau dans les calculs simplifiés.

Nous proposons donc :

$$\epsilon_v = \epsilon_{ve} + \epsilon_{vp}$$

$$\sigma_v = E_v(\tau^* + t)\,\epsilon_{ve}$$

$$\sigma_v = f_v(\tau^* + t, \epsilon_{vp}\ \dot{\epsilon}_{vp}) = E_v(\tau^* + t)\ \psi_v(\tau^* + t, \epsilon_{vp})\ \varphi_v(\tau^* + t, \dot{\epsilon}_{vp})$$

$$= K_v(\tau^* + t)\ \epsilon_{vp}^{\frac{1}{m(\tau^* + t)}}\ \dot{\epsilon}_{vp}^{\frac{1}{n(\tau^* + t)}}$$

τ^* étant la valeur de référence de τ pour $t = 0$

L'instabilité peut se manifester sur les fonctions ou coefficients de plusieurs manières. Un vieillissement peut provoquer :

– un «durcissement» qui augmente les valeurs de K_v m_v et n_v

Exemple : Vieillissement du duralumin AU4G1 à la température ambiante

– un «adoucissement» qui engendre une diminution des coefficients K_v et n_v

Exemple : Vieillissement d'alliages à des températures supérieures aux températures critiques de certaines transformations cristallographiques.

Il faut souligner que dans la plupart des cas pratiques, la variation dans le temps des fonctions ou coefficients caractéristiques est faible car, pour des raisons de sécurité, on s'efforce d'élaborer les matériaux les plus stables possible.

L'hypothèse introduite exclut de rendre compte du phénomène de recouvrance qui peut être considéré comme une évolution consécutive à l'existence de déformations visco-plastiques (fig. II,31).

Pour les matériaux usuels, cette diminution de déformation permanente $\Delta\epsilon_{pr}$ n'est réellement importante ($\frac{\Delta\epsilon_{pr}}{\epsilon_p} > 5\ \%$) que dans le domaine des très petites déformations visco-plastiques ($\epsilon_p < 0{,}1\ 10^{-2}$) et dans des conditions de température bien particulières [59].

Il paraît assez difficile actuellement de rendre compte simplement de ce phénomène secondaire. Deux voies de recherche semblent possibles :

- les lois de comportement de type intégral., **J. Hult** [60] a montré que la théorie de **Rabotnov** [61] basée sur l'hérédité pouvait rendre compte de la recouvrance ;

- les lois issues de la méthode globale, en considérant le matériau comme visco-élastique-visco-plastique. La recouvrance serait alors considérée comme une manifestation d'élasticité retardée.

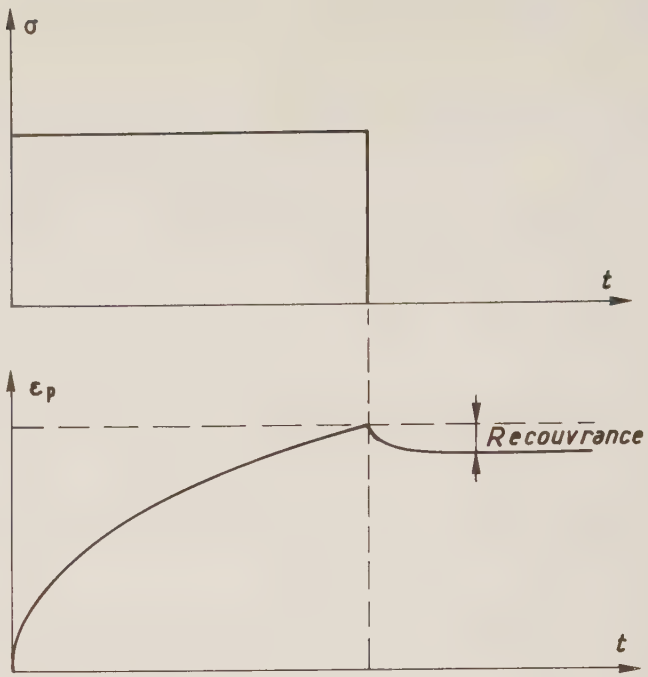


Fig. II,31 - Mise en évidence de la recouvrance dans un essai de fluage.

II,3. Détermination expérimentale des grandeurs caractéristiques

Pour effectuer des calculs d'élasto-visco-plasticité, il faut donner une valeur quantitative aux divers fonctions ou coefficients caractéristiques de l'élément de volume selon le schéma de la loi de comportement adoptée. Les méthodes développées ici permettent de déterminer les fonctions φ et ψ ou les coefficients K, m et n de la loi unidimensionnelle proposée, mais elles ont une portée plus générale et peuvent être utilisées pour la détermination des caractéristiques d'un grand nombre de lois de comportement définies sur l'élément de volume.

La réalisation des expériences relatives aux phénomènes de visco-plasticité se heurte à trois types de difficultés :

- La grande non linéarité des effets par rapport aux causes impose une grande précision dans la mesure des valeurs des paramètres d'état.
- La déformation ϵ est un paramètre difficilement accessible, il n'existe pas de moyen simple de mesure directe utilisable à haute température.
- Les applications industrielles concernent souvent des durées d'utilisation importantes et, comme les phénomènes mis en cause dépendent du temps, certaines expériences de base sont des essais de longue durée (semaines, mois, années) avec tous les aléas correspondants. On va voir que dans une certaine mesure, les expériences de relaxation apportent une solution à ce problème de durée.

II,3.1. Intérêt particulier des essais de relaxation

L'expérience de relaxation en traction simple a été définie au paragraphe II,2.1.1 :

$$\epsilon = \epsilon_0 \, Ech(t) \longrightarrow \sigma(t)$$

Ce type d'essai assez répandu en rhéologie des matériaux synthétiques [62] a été jusqu'ici assez peu utilisé dans l'étude des matériaux métalliques. Il n'est couramment employé que pour obtenir la caractéristique de relaxation des matériaux utilisés dans les cas de sollicitation à déformation constante imposée (fil de précontrainte des bétons [63], problème des contraintes résiduelles [64]).

En fait, il présente un très grand intérêt dans l'étude du comportement des matériaux élasto-visco-plastiques non linéaires car il permet d'atteindre en des temps courts des états rhéologiques (représentés par les valeurs des paramètres σ_v , ϵ_{vp} , $\dot{\epsilon}_{vp}$) qui ne peuvent être atteints qu'en des temps longs par les autres types d'essais.

II,3.1.1. Mise en évidence du gain de temps

L'hypothèse fondamentale pour cette démonstration est l'existence d'une loi mécanique d'état isotherme pour les corps élasto-visco-plastiques. Pour obtenir des expressions analytiques desquelles on pourra tirer des conclusions, cette loi de comportement sera particularisée par :

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$$

$$\sigma = E\epsilon_e$$

$$\sigma = K\epsilon_p^{\frac{1}{m}} \dot{\epsilon}_p^{\frac{1}{n}}$$

Les calculs seront effectués en contrainte et déformation apparentes pour simplifier les développements.

Pour mettre en évidence le gain de temps apporté par les expériences de relaxation, nous allons calculer et comparer les temps t_f^* , t_e^* , t_r^* nécessaires pour atteindre un état rhéologique donné caractérisé par les valeurs des paramètres d'état ϵ_p^* , $\dot{\epsilon}_p^*$ respectivement dans :

– un cas de fluage à la contrainte constante

$$\sigma = \sigma^* = K\epsilon_p^{*\frac{1}{m}} \dot{\epsilon}_p^{*\frac{1}{n}}$$

– un cas d'écrouissage à la vitesse de déformation constante

$$\epsilon = \dot{\epsilon}^* \longrightarrow \begin{cases} \epsilon_{p(t^*)} = \epsilon_p^* \\ \dot{\epsilon}_{p(t^*)} = \dot{\epsilon}_p^* \end{cases}$$

– un cas de relaxation à la déformation constante

$$\epsilon = \epsilon^* = \frac{\sigma^*}{E} + \epsilon_p^*$$

Ces calculs effectués en 1966 [65] ont pu être améliorés par l'introduction d'hypothèses moins restrictives.

– Calcul en fluage $\sigma = \sigma^* = cte$

L'équation de visco-plasticité s'écrit :

$$\sigma^* = K\epsilon_p^{\frac{1}{m}} \dot{\epsilon}_p^{\frac{1}{n}}$$

La solution de cette équation différentielle du premier ordre à variables séparées, pour la condition initiale

$$t = 0 \longrightarrow \epsilon = 0$$

est :

$$t_f^* = \frac{m}{n+m} \left[\frac{K}{\sigma^*}\right] \epsilon_p^{*\frac{n+m}{m}}$$

– Calcul en écrouissage $\dot{\epsilon} = cte$

La résolution directe des 3 équations de comportement dans ce cas n'est pas possible explicitement. On ne peut trouver qu'une solution numérique qui ne permet pas d'étudier commodément la variation de t_e^* en fonction des coefficients ; nous cherchons une solution approchée :

Avec la condition initiale :

$$t = 0 \longrightarrow \epsilon = 0$$

on a :

$$t_e^* = \frac{\epsilon^*}{\dot{\epsilon}}$$

$\dot{\epsilon}$ peut être calculé par dérivation de l'équation de partition :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_p = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\epsilon}_p$$

$\dot{\sigma}$ peut être obtenu par dérivation de l'équation de visco-plasticité :

$$\dot{\sigma} = \sigma \left[\frac{1}{m} \frac{\dot{\epsilon}_p}{\epsilon_p} + \frac{1}{n} \frac{\ddot{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_p} \right]$$

d'où

$$t_e^* = \frac{\epsilon^*}{\dot{\epsilon}_p^* \left[1 + \frac{\sigma^*}{E} \left[\frac{1}{m\epsilon_p^*} + \frac{1}{n} \frac{\ddot{\epsilon}_p^*}{\dot{\epsilon}_p^{*2}} \right] \right]}$$

La valeur $\ddot{\epsilon}_p^*$ n'est pas connue puisque l'équation différentielle n'a pas été résolue mais dans la pratique

$$(2 < n < 400 \ , \ 2 < m < 100 \ , \ n > m \ , \ \epsilon_p^* > 0{,}1 \ \frac{\sigma^*}{E})$$

$$\frac{1}{n} \frac{\ddot{\epsilon}_p^*}{\dot{\epsilon}_p^{*2}} \ll \frac{1}{m\epsilon_p^*}$$

et nous prendrons :

$$t_e^* \# \frac{\epsilon^*}{\dot{\epsilon}_p^* \left[1 + \frac{\sigma^*}{Em\epsilon_p^*} \right]}$$

- Calcul en relaxation $\epsilon = \epsilon^* = cte$

Cette condition écrite dans la loi de comportement donne une équation différentielle du premier ordre à variables séparées

$$E \left[\epsilon^* - \epsilon_p \right] = K \epsilon_p^{\frac{1}{m}} \dot{\epsilon}_p^{\frac{1}{n}}$$

Sa résolution, avec la condition initiale

$$t = 0 \longrightarrow \epsilon_p = 0$$

donne :

$$t_r^* = \left[\frac{K}{E} \right]^n \int_0^{\epsilon_p^*} \frac{X^{\frac{n}{m}}}{[\epsilon^* - X]^n} dX$$

L'intégrale $J = \int_0^{\epsilon_p^*} \frac{X^{\frac{n}{m}}}{[\epsilon^* - X]^n} . dX$ ne peut être calculée que numériquement mais on peut lui trouver des représentations fonctionnelles approchées [66]. Avec les hypothèses n entier, $\frac{n}{m}$ entier, $\frac{n}{m} \leq n - 2$ par la méthode des résidus, développements en séries entières et majorations successives suivant les valeurs de m et n, on obtient les résultats consignés dans le tableau de la figure II.32.

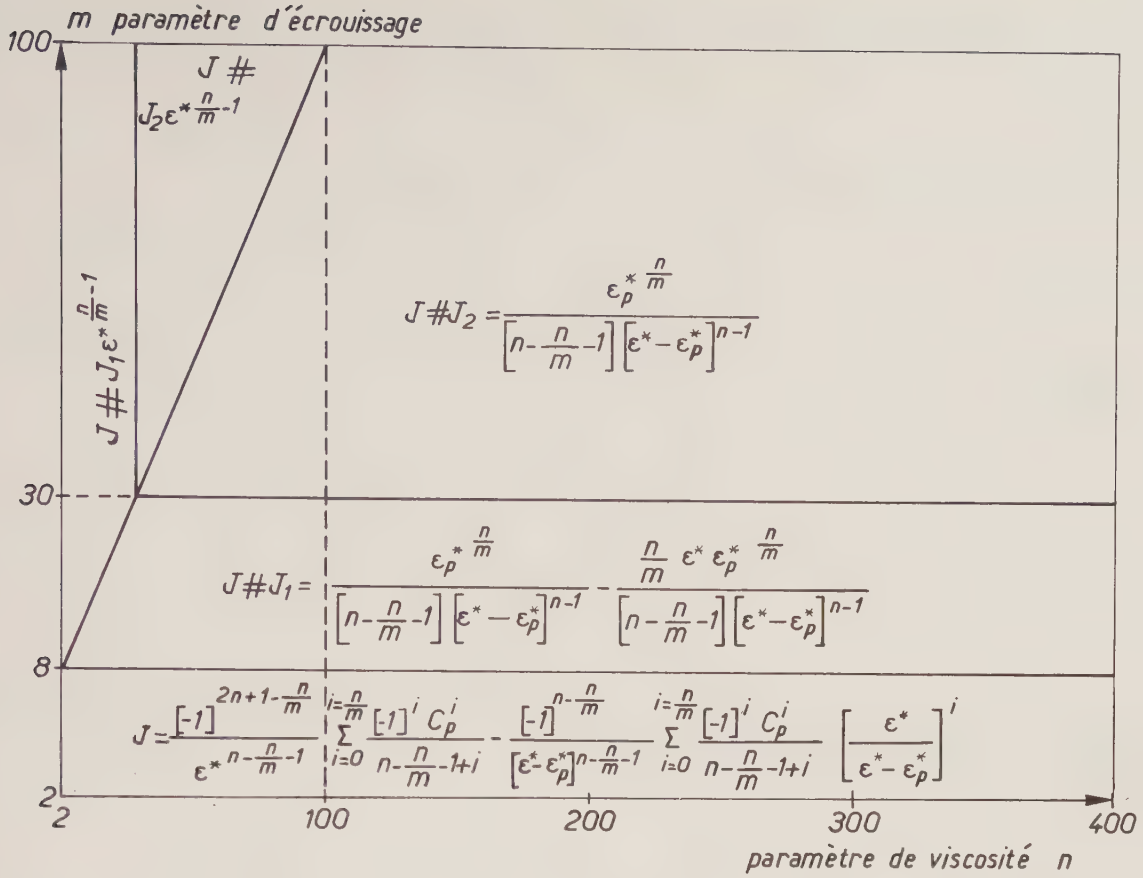


Fig. II,32 - Tableau des représentations fonctionnelles de l'intégrale $J = \int_0^{\epsilon_p^*} \frac{x^{\frac{n}{m}}}{[\epsilon^* - x]^n} dx$

d'où :

$$t_r^* = \left[\frac{K}{E}\right]^n J$$

Notons que le résultat valable pour m et n grands :

$$t_r^* \# \left[\frac{K}{E}\right]^n J = \frac{1}{n - \frac{n}{m} - 1} \frac{\frac{\sigma^*}{E}}{\dot{\epsilon}_p^*}$$

est la solution du problème correspondant à l'hypothèse physique intuitive suivante [65] : pendant la relaxation la déformation visco-plastique ϵ_p varie peu et l'on peut supposer

$$\psi(\epsilon_p) = \epsilon_p^{\frac{1}{m}} = cte \quad \text{en relaxation}$$

- Gain de temps

Il s'exprime par les valeurs des rapports $\frac{t_f}{t_r}$ et $\frac{t_e}{t_r}$

$$\boxed{\frac{t_f^*}{t_r^*} = \frac{m}{m+n} \frac{\epsilon_p^{*\frac{m+n}{m}}}{\left[\frac{\sigma^*}{E}\right]^n J} \simeq \frac{m}{m+n}\left[n - \frac{n}{m} - 1\right] \frac{\epsilon_p^*}{\frac{\sigma^*}{E}}}$$

$$\boxed{\frac{t_e^*}{t_r^*} \# \frac{\epsilon^*}{\dot{\epsilon}_p^*\left[1 + \frac{\sigma^*}{Em\epsilon_p^*}\right]\left[\frac{K}{E}\right]^n J} \simeq \left[n - \frac{n}{m} - 1\right] \frac{\epsilon^*}{\frac{\sigma^*}{E}\left[1 + \frac{\sigma^*}{Em\,\epsilon_p^*}\right]}}$$

On peut calculer l'ordre de grandeur de ces rapports pour les matériaux usuels :

$$\left.\begin{array}{l} 2 < m < 100 \\ 3 < n < 400 \end{array}\right\} \quad n > m$$

et dans les cas usuels définis par :

$$1 \leq \frac{\epsilon_p^*}{\frac{\sigma^*}{E}} \leq 25$$

(ce qui correspond environ à $0{,}2\ 10^{-2} \leq \epsilon_p^* \leq 5\ 10^{-2}$)

$$\frac{1}{5} \lesssim \frac{t_f^*}{t_r^*} \lesssim 2000$$

$$1 \lesssim \frac{t_e^*}{t_r^*} \lesssim 10\,000$$

ce qui montre qu'un état rhéologique donné $(\epsilon_p^*\ ,\ \dot{\epsilon}_p^*)$ peut être atteint par un essai de relaxation de l'ordre de 1/5 à 2000 fois plus «rapidement» que par un essai de fluage et de 1 à 10 000 fois plus rapidement que par un essai d'écrouissage.

Exemple : Alliage AU2GN trempé vieilli
Température 130° C

$$\left.\begin{array}{l} m = 13 \\ n = 71 \\ \frac{\epsilon_p^*}{\frac{\sigma^*}{E}} = 3 \end{array}\right\} \quad \frac{t_f^*}{t_r^*} \# 30\ ,\ \frac{t_e^*}{t_r^*} \# 260$$

On verra au chapitre IV que cet intérêt considérable a été mis à profit dans l'élaboration de méthodes particulièrement avantageuses pour la détermination des caractéristiques visco-plastiques des matériaux. Ces méthodes sont d'autant plus avantageuses que les non linéarités sont plus fortes (m et n grands).

II,3.1.2. L'essai de relaxation multiple en traction simple

Du résultat $\sigma(t)$ d'un essai de relaxation simple $\epsilon = \epsilon_0$ il est possible de tirer la loi de viscosité $\sigma_v(\dot{\epsilon}_{vp})$ pour $\epsilon = \epsilon_0 = cte$

A chaque instant on peut calculer :

$$\sigma_v = \sigma\left[1 + \epsilon_0\right]$$
$$\epsilon_v = \mathrm{Log}\left[1 + \epsilon_0\right]$$
$$\epsilon_{vp} = \epsilon_v - \frac{\sigma_v}{E_v}$$
$$\dot{\epsilon}_{vp} = -\frac{\dot{\sigma}_v}{E_v}$$

d'où $\sigma_v(\dot{\epsilon}_{vp})$ pour $\epsilon = \epsilon_0$ (fig. II,33).

Pendant la relaxation, ϵ_{vp} varie peu et d'une quantité au plus égale à :

$$\epsilon_{v0} - \epsilon_{vp}(t = t_0) = \frac{\sigma_{vm}}{E_v}$$

si bien que l'on peut obtenir aisément la loi de viscosité pour $\epsilon_{vp} = cte$ soit par une correction d'après une estimation de la loi d'écrouissage $\psi_v(\epsilon_{vp})$, soit simplement en négligeant la variation de ϵ_{vp} au cours de la relaxation (fig. II,33).

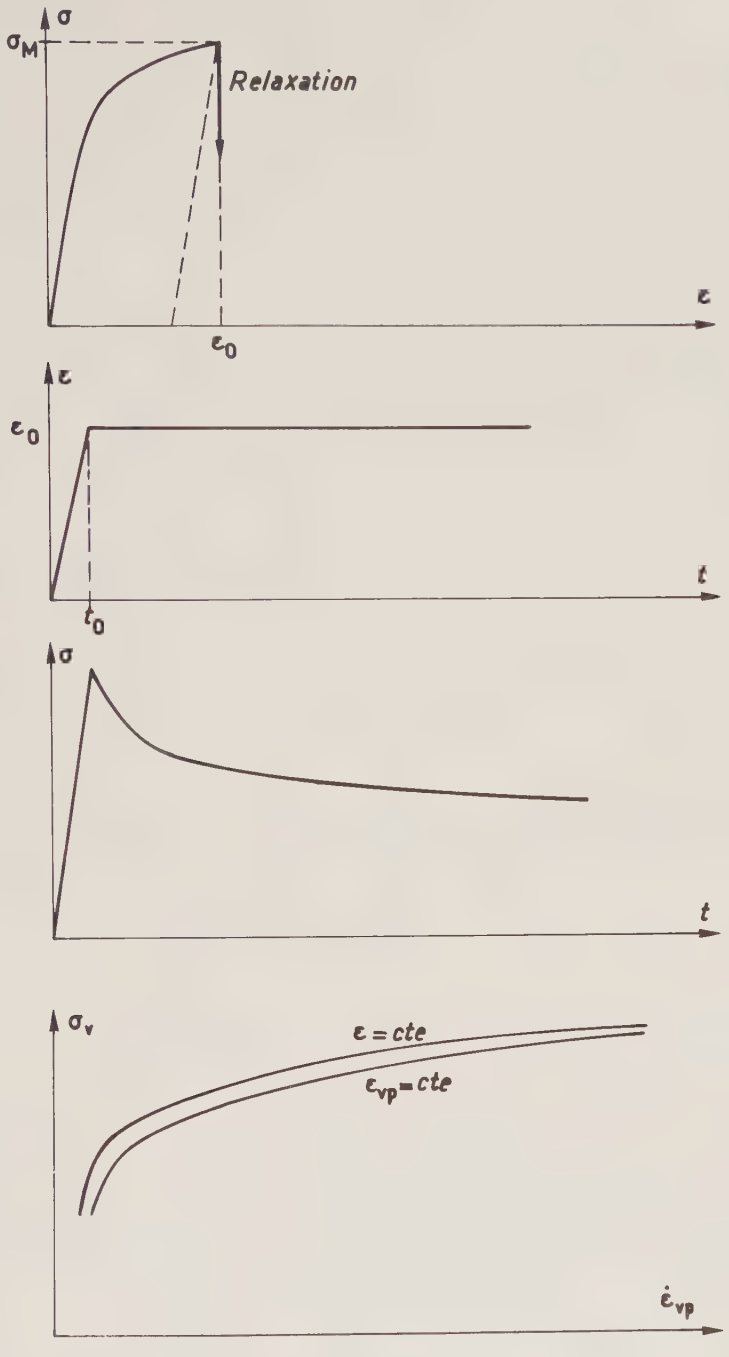


Fig. II,33 - Détermination de la fonction de viscosité par un essai de relaxation

Pour caractériser la loi de viscosité correspondant à plusieurs valeurs de ϵ_{vp}, ou bien pour obtenir la loi d'écrouissage, $\sigma_v(\epsilon_{vp}, \dot{\epsilon}_{vp} = cte)$ il faut réaliser plusieurs essais de relaxation pour des valeurs différentes de la déformation ϵ. Dans l'hypothèse de l'existence d'une loi mécanique d'état (non-intervention de l'histoire du chargement) il était intéressant de grouper ces essais en un seul :

l'essai de relaxation multiple qui consiste à imposer à une éprouvette des paliers successifs de déformation par valeurs discrètes et crpissantes ϵ_i (fig. II,34).

Ce nouvel essai mis au point en 1966 [67] permet donc, à l'aide d'une seule expérience, d'explorer l'espace de configuration de l'élément de volume :

- par valeurs continues pour le paramètre $\dot{\epsilon}_{vp}$
- par petits domaines discrets pour le paramètre ϵ_{vp}

Une loi du type $\sigma_v = f_v(\epsilon_{vp}, \dot{\epsilon}_{vp})$ entraîne l'équivalence de l'essai de relaxation multiple avec un ensemble d'essais de relaxation simple. Inversement une vérification expérimentale de cette équivalence apporte une justification supplémentaire de cette loi.

La figure II,35 montre un exemple de comparaison dans le plan $(\sigma_v, \dot{\epsilon}_{vp})$ entre les 2ème, 3ème, 4ème et 5ème paliers d'un essai de relaxation multiple et 4 essais de relaxation simple exécutés aux mêmes déformations. Dans le grand domaine des vitesses $\dot{\epsilon}_{vp}$ étudié, les différences relatives en contrainte n'excèdent pas 5 %.

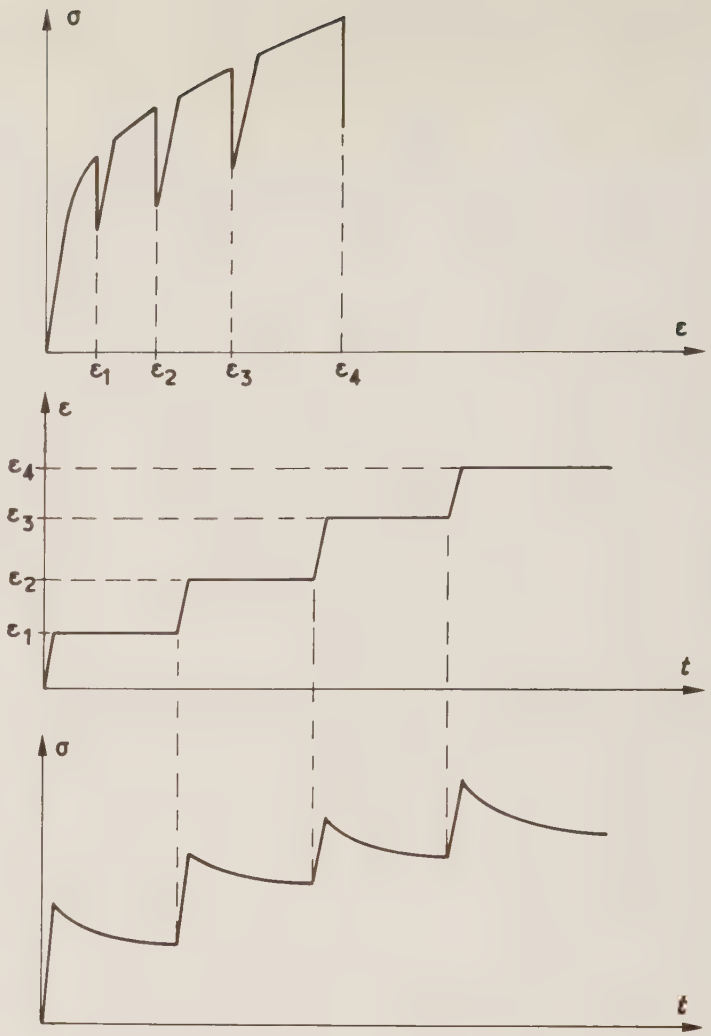
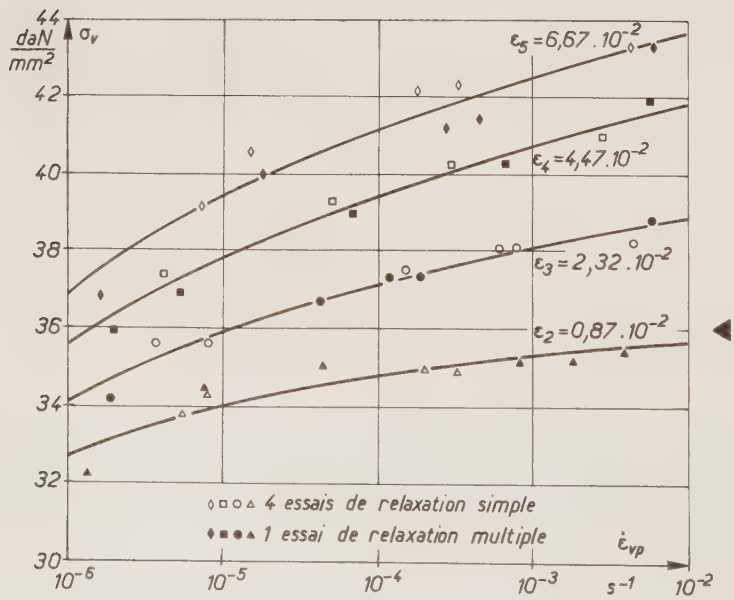
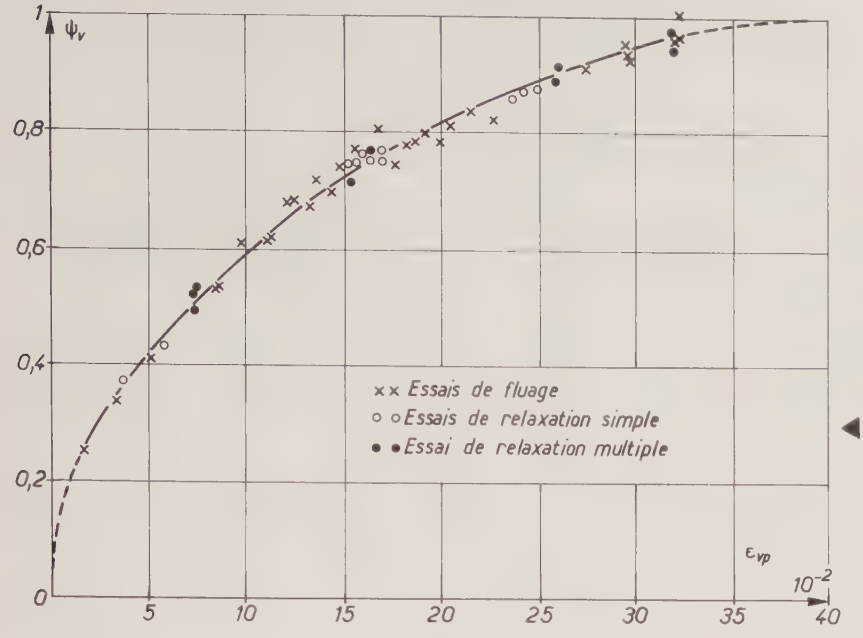


Fig. II,34 - L'essai de relaxation multiple ▶



◀ *Fig. II,35 - Comparaison, essais de relaxation simple et multiple*
- Duralumin AU4G trempé vieilli
- Température 100° C

La figure II,36 relative à un matériau très écrouissable montre que l'essai de relaxation multiple n'affecte pas sensiblement la fonction d'écrouissage $\psi_v\ (\epsilon_{vp})$ déterminée par différents types d'essais.



◀ *Fig. II,36 - Fonction d'écrouissage déterminée par différents types d'essais*

Cuivre recuit - Température 20° C

Nous disposons donc en l'essai de relaxation multiple d'un moyen expérimental particulièrement riche et bien adapté à l'étude des matériaux élasto-visco-plastiques.

II,3.2. Mesure des différents paramètres

Dans les essais unidimensionnels, les seuls paramètres accessibles à la mesure directe sont la contrainte, la température et la déformation, dont les évolutions en fonction du temps interviennent, soit comme cause, soit comme effet.

II,3.2.1. Paramètre température

Le fluage est extrêmement sensible au paramètre température et la détermination précise des lois de comportement isotherme exige que l'éprouvette d'essai soit soumise à un champ de température uniforme dans l'espace et constant dans le temps avec une grande précision.

Un calcul d'erreur basé sur la loi de **Dorn** indiquée au paragraphe II,2.1.4 :

$$\dot{\epsilon}_{vp} = g_{Dv}(\sigma_v \ldots) e^{-\frac{\Delta H}{RT}}$$

permet de chiffrer ce degré de précision :

$$\frac{\delta \dot{\epsilon}_{vp}}{\dot{\epsilon}_{vp}} = \frac{\delta \epsilon_{vp}}{\epsilon_{vp}} = \frac{\Delta H}{RT} \frac{\delta T}{T}$$

Pour les matériaux métalliques et les conditions usuelles :

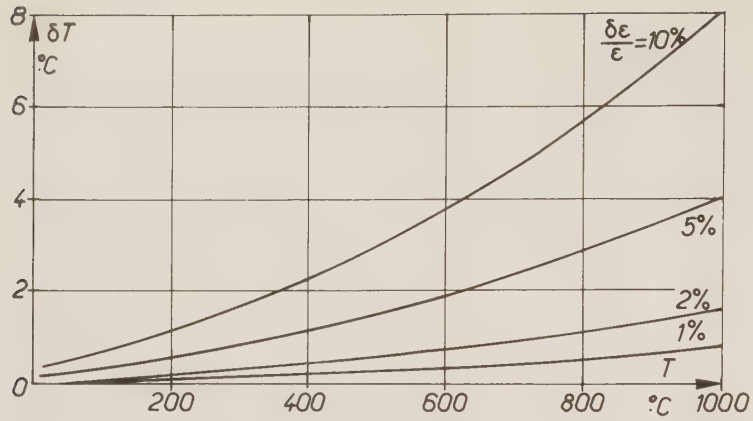
$$\frac{5}{10} T_{fusion} < T < \frac{9}{10} T_{fusion}$$

$$30\,000 \text{ cal/Mole} < \Delta H < 70\,000 \text{ cal/Mole}$$

$$\boxed{15 \frac{\delta T}{T} < \frac{\delta \epsilon_{vp}}{\epsilon_{vp}} < 70 \frac{\delta T}{T}}$$

ce qui montre que la précision relative à respecter sur la température doit être de 15 à 70 fois supérieure à la précision souhaitée sur la déformation visco-plastique.

La figure II,37 [68] illustre cet impératif.



◀ *Fig. II,37 - Ecart maximal de température admissible en fonction de la température d'essai pour différentes valeurs de l'erreur tolérée sur la déformation.*

Métaux usuels : $\frac{\Delta H}{R} \simeq 25\,000°\,K$

Moyennant certaines précautions, la température peut être mesurée par des thermocouples soudés sur l'éprouvette.

II,3.2.2. Paramètre contrainte

La loi de viscosité introduite $\varphi\,(\dot{\epsilon}_{vp})$ est toujours une loi fortement non linéaire (ex. fig. II,14-II,16) qui exprime la très grande sensibilité du fluage ($\dot{\epsilon}_{vp}$) à la contrainte.

Un calcul d'erreur basé sur la loi :

$$\varphi\,(\dot{\epsilon}_{vp}) = \dot{\epsilon}_{vp}^{\frac{1}{n_v}}$$

illustre l'importance de la précision dans l'application et la mesure des contraintes [69]

$$\frac{\delta\dot{\epsilon}_{vp}}{\dot{\epsilon}_{vp}} = \frac{\delta\epsilon_{vp}}{\epsilon_{vp}} = n_v\frac{\delta\sigma}{\sigma}$$

Pour les valeurs usuelles de n_v :

$$2\,\frac{\delta\sigma_v}{\sigma_v} \leq \frac{\delta\dot{\epsilon}_{vp}}{\dot{\epsilon}_{vp}} \leq 400\,\frac{\delta\sigma_v}{\sigma_v}$$

Dans la pratique, la contrainte dans l'éprouvette est déterminée par la mesure de la force sollicitatrice F effectuée par un dynamomètre qui doit être placé directement en série avec l'éprouvette (de section S_o) :

$$\sigma = \frac{F}{S_o}$$

La contrainte vraie est obtenue par

$$\sigma_v = \frac{F}{S\,[1 - \nu\epsilon]^2}$$

où ν est le coefficient de **Poisson** généralisé défini au paragraphe II,1.

L'expression de ν trouvée :

$$\nu = \frac{1}{2} - \frac{\sigma}{\epsilon}\left[\frac{1 - 2\,\nu_e}{2\,E}\right]$$

permet de calculer l'erreur relative commise en calculant la contrainte vraie par la formule classique [68]

$$\sigma_v = \frac{F}{S_o}\left[1 + \epsilon\right]$$

(ce qui revient à linéariser l'expression de σ_v avec $\nu = \frac{1}{2}$)

$$\frac{\delta\sigma_v}{\sigma_v} = - \frac{\sigma}{E} \left[1 - 2\nu_e \right]$$

Pour les matériaux usuels :

$$\text{Max} \left(\left| \frac{\delta\sigma_v}{\sigma_v} \right| \right) \simeq \frac{3}{1000}$$

II,3.2.3. Paramètre déformation

La mesure de la déformation, paramètre local, est toujours délicate car elle met en jeu des déplacements très faibles.

Si la distance de deux plans normaux à l'axe de l'éprouvette varie de L à $L + dL$ entre les instants t et $t + dt$, on sait que la déformation vraie ϵ_v est définie par

$$d\epsilon_v = \frac{dL}{L}$$

Si L_o est la longueur initiale de référence, la déformation vraie est reliée à la déformation apparente :

$$\epsilon = \frac{L - L_o}{L_o}$$

par :

$$\epsilon_v = \text{Log} \frac{L}{L_o} = \text{Log} \left[1 + \epsilon \right]$$

La mesure de la déformation ϵ peut être effectuée à l'aide d'extensomètres ou de jauges de déformation à fil résistant, fixés ou collés sur la partie utile de l'éprouvette mais cette fixation est très difficile voire impossible à réaliser à moyenne et haute températures.

Si la machine de traction utilisée possède une raideur fidèle, on peut utiliser une méthode originale décrite au paragraphe IV,1. Elle donne directement la déformation visco-plastique ϵ_{vp} à partir de la seule connaissance de la force sollicitatrice et d'un déplacement global comprenant la déformation de la partie utile de l'éprouvette et des déformations parasites provenant de la machine et des têtes de l'éprouvette. Ce déplacement est mesuré par un capteur situé hors de la zone de l'éprouvette, ce qui rend la méthode applicable à toute température.

II,3.3. Obtention des fonctions et coefficients caractéristiques

Les caractéristiques d'élasticité peuvent être déterminées par les procédures classiques lorsqu'elles sont applicables ou bien par une méthode originale décrite au paragraphe IV,2.

La détermination des caractéristiques visco-plastiques est beaucoup plus délicate. L'obtention des courbes iso-contrainte σ_v dans le plan de phase $(\epsilon_{vp}, \dot{\epsilon}_{vp})$ ne pose qu'un problème de nombre d'essais lié à la dispersion inévitable. Par contre la représentation de la loi :

$$\sigma_v = f_v \left(\epsilon_{vp}, \dot{\epsilon}_{vp} \right)$$

par un produit de deux fonctions :

$$\sigma_v = E_v \psi_v(\epsilon_{vp}) . \varphi_v(\dot{\epsilon}_{vp})$$

elles-mêmes représentées par des fonctions puissance

$$\sigma_v = K_v \epsilon_{vp}^{\frac{1}{m_v}} \dot{\epsilon}_{vp}^{\frac{1}{n_v}}$$

constitue une suite de simplifications, que les résultats expérimentaux ne vérifient qu'avec des marges d'incertitude qui compliquent la détermination des coefficients K_v, m_v et n_v .

Nous avons vu au paragraphe II,3.1.2. que l'essai de relaxation, ou mieux l'essai de relaxation multiple, permet de définir la fonction de viscosité $\varphi_v(\dot{\epsilon}_{vp})$ et donc le coefficient n_v .

Il faut faire ici une remarque importante : ce coefficient n_v est numériquement différent du coefficient de **Norton** n_N défini comme l'exposant de la loi qui relie la vitesse de fluage secondaire $\dot{\epsilon}^*$ à la contrainte σ dans les expériences de fluage

$$\dot{\epsilon}^* = \left[\frac{\sigma}{\lambda_N}\right]^{n_N}$$

Le lieu des points d'inflexion d'un réseau de courbes de fluage est en général représenté dans le plan (ϵ, t) par une courbe concave très différente de $\epsilon = cte$ (fig. II,38)

Donc les points représentatifs de $\sigma(\dot{\epsilon}^*)$ correspondent à des valeurs de ϵ croissantes avec $\dot{\epsilon}^*$.

Par contre d'après la loi :

$$\sigma_v = K_v \epsilon_{vp}^{\frac{1}{m_v}} \dot{\epsilon}_{vp}^{\frac{1}{n_v}}$$

le coefficient n_v doit être déterminé par la courbe représentative de $\sigma_v(\dot{\epsilon}_{vp})$ pour :

$$\epsilon_{vp} = cte$$

Si, pour simplifier le raisonnement, on confond les valeurs vraies et apparentes des différents paramètres $n \neq n_v$ et si l'on confond ϵ_p avec ϵ, n est alors déterminé dans un réseau de courbes de fluage par la courbe représentative de $\sigma(\dot{\epsilon})$ pour $\epsilon = cte$ (fig. II,38).
Dans tous les cas rencontrés :

$$n > n_N$$

ce qui correspond d'ailleurs à la convexité de la fonction monotone croissante $\psi_v(\epsilon_{vp})$

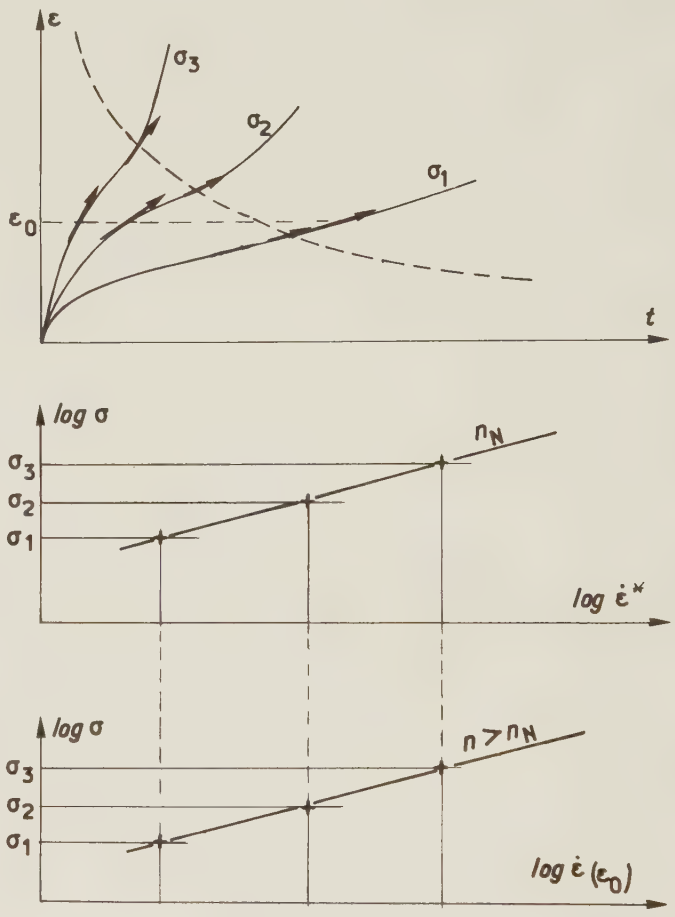


Fig. II,38 - Détermination des coefficients n_N et n

Ceci explique que le coefficient n déterminé par des expériences de relaxation soit toujours supérieur au coefficient déterminé sur la base des résultats en fluage établi. (Les valeurs ne sont cohérentes que si l'on compare bien $\sigma(\dot{\epsilon})$, pour la même valeur de $\epsilon = cte$). Cela explique, d'autre part, les mauvais résultats de l'application de la loi de **Norton-Nadaï-Hoff**, déterminée par des expériences de fluage, au cas de fluage sous charge variable et à la relaxation par la méthode de **F. K. G. Odqvist** [19] . Les valeurs des coefficients n et n_N seraient égales dans des expériences qui réaliseraient l'état asymptotique de fluage établi.

La fonction d'écrouissage $\psi_v(\epsilon_{vp})$ et par conséquent m_v peuvent être déterminés par des essais d'écrouissage $\dot{\epsilon} = cte$ (fig. II,39).

$$\psi_v(\epsilon_{vp}) = \frac{\sigma_v}{E_v \varphi_v(\dot{\epsilon}_{vp})} \qquad \text{(à chaque instant)}$$

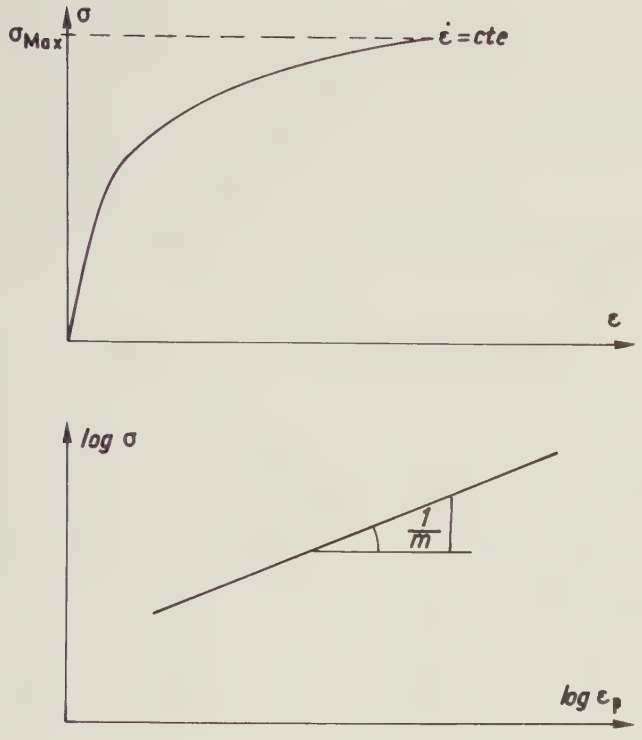
en confondant les valeurs vraies et apparentes, et en considérant :

$$\dot{\epsilon}_{vp} \neq \dot{\epsilon} \longrightarrow \varphi_v(\dot{\epsilon}_{vp}) \neq \varphi(\dot{\epsilon}) = cte$$

$$\psi(\epsilon_p) \neq \frac{\sigma}{E\,\varphi(\dot{\epsilon})}$$

Si ψ est normée à 1 : pour $\sigma = \sigma_{Max}$

$$\psi(\epsilon_p) \neq \frac{\sigma}{\sigma_{Max}}$$



◀ *Fig. II,39 - Détermination de la fonction ψ et du coefficient m*

Nous verrons au paragraphe IV,3 qu'il est possible de définir une procédure plus élaborée qui permet de déterminer $\psi_v(\epsilon_{vp})$ et $\varphi_v(\dot{\epsilon}_{vp})$ en minimisant les effets de la dispersion inévitable.

II,4. Utilisation de la loi proposée

La validité de la loi de comportement unidimensionnel proposée pour les corps élasto-visco-plastiques peut se schématiser par la figure II,40.

A partir d'un point quelconque p de l'espace des états, la loi rend compte de toute évolution physiquement possible :

Ecr → Cas d'écrouissage
Flu → Cas de fluage
Rel → Cas de relaxation
REA → Cas de retour en arrière
CRV → Cas de charge rapidement variable
⇝ Tous les cas intermédiaires

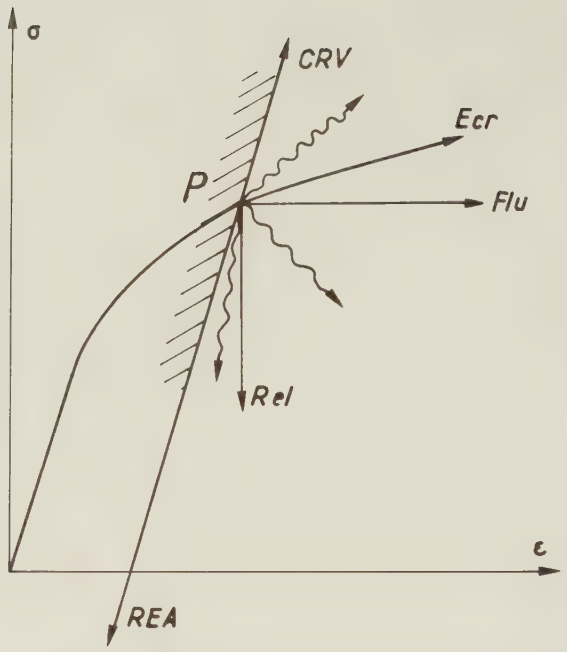


Fig. II,40 - Validité de la loi d'élasto-visco-plasticité

La loi se résume par l'ensemble des formules suivantes :

$$\epsilon_v = \text{Log}\,(1+\epsilon)$$

$$\sigma_v \# \sigma\left[1+\epsilon\right]$$

$$\tilde{\epsilon}_{vp}(t) = \int_0^t |\dot{\epsilon}_{vp}|\,dt \;,\; (\tilde{\epsilon}_{vp} \equiv \epsilon_{vp} \quad \text{si} \quad \dot{\epsilon}_{vp} \geq 0\ \forall\, t)$$

cas isotherme quasi-statique en chargement quelconque :

$$\epsilon_v = \epsilon_{ve} + \epsilon_{vp}$$

$$\sigma_v = E_v \epsilon_{ve}$$

$$\sigma_v = f_v(\tilde{\epsilon}_{vp}, \dot{\epsilon}_{vp}) = E_v \psi_v(\tilde{\epsilon}_{vp}) \cdot \varphi_v(\dot{\epsilon}_{vp}) = K_v \tilde{\epsilon}_{vp}^{\frac{1}{m_v}} \cdot \dot{\epsilon}_{vp}^{\frac{1}{n_v}}$$

cas des charges rapidement variables : $\dfrac{\dot{\sigma}}{\sigma} \gtrsim 0{,}1\ s^{-1}$

$$\dot{\epsilon}_{vp} = \dot{\epsilon}_{vp}(\sigma_v, \tilde{\epsilon}_{vp}) \cdot \eta_v(\dot{\sigma}_v)$$

cas des variations de température :

cas de variations lentes :

$$\frac{\Delta T}{T_o} \leq \frac{1}{100} \longrightarrow \dot{\epsilon}_{vp} = \dot{\epsilon}_{vp}(\sigma_v, \tilde{\epsilon}_{vp}, T_o) \cdot e^{-\frac{\Delta H}{R}\left[\frac{1}{T_o+\Delta T} - \frac{1}{T_o}\right]}$$

$$\frac{\Delta T}{T_o} > \frac{1}{100} \longrightarrow \sigma_v = K_v(T)\, \tilde{\epsilon}_{vp}^{\frac{1}{m_v(T)}} \cdot \dot{\epsilon}_{vp}^{\frac{1}{n_v(T)}}$$

cas de variations rapides $(\dot{T} \gtrsim 5^\circ/s)$

$$\dot{\epsilon}_{vp} = \dot{\epsilon}_{vp}(\sigma_v, \tilde{\epsilon}_{vp}, T) \cdot \zeta_v(\dot{T})$$

cas des matériaux non stables

$\psi_v, \varphi_v, K_v, m_v, n_v$ varient avec τ (âge du matériau)

Les vérifications expérimentales ont été effectuées sur un certain nombre de matériaux dans le domaine suivant de variation des paramètres d'état :

$$293^{\circ}K \leq T \lesssim 4/5\ T^{\circ}K \text{ fusion}$$

$$0 < \sigma \lesssim \sigma \text{ rupture}$$

$$0{,}01\ 10^{-2} < \epsilon_p \lesssim 5\ 10^{-2}$$

$$10^{-11}\ s^{-1} \lesssim \dot{\epsilon}_p \lesssim 10^{-2}\ s^{-1}$$

Elles ont montré :

- la difficulté de traduire le fluage «naissant» ; la loi est mal définie pour les faibles valeurs de la déformation visco-plastique et pas du tout au voisinage de $\epsilon_p = 0$
- la difficulté de déterminer les constantes K_v, m_v, n_v dans un large domaine de déformation visco-plastique. La pratique montre qu'il est parfois nécessaire de définir les fonctions ψ_v et φ_v par morceaux en fonction de ϵ_{vp} c'est-à-dire de prendre des valeurs de K_v, m_v, n_v différentes dans des sous-domaines de déformation visco-plastique, ce qui ne présente pas de difficulté dans les calculs sur ordinateur. De toute façon, la loi $\sigma_v = f_v(\epsilon_{vp}, \dot{\epsilon}_{vp})$ n'est pas en cause.

La figure II,41 donne un exemple de l'ordre de grandeur des variations maximales qui peuvent être mises en évidence.

Le calcul proprement dit, lorsqu'il est effectué en termes finis sur la géométrie initiale :

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$$

$$\sigma = E\epsilon_e$$

$$\sigma = f(\epsilon_p, \dot{\epsilon}_p) = E\psi(\epsilon_p)\,\varphi(\dot{\epsilon}_p) = K\epsilon_p^{\frac{1}{m}}\,\dot{\epsilon}_p^{\frac{1}{n}}$$

conduit en général à des solutions explicites. Un certain nombre d'exemples d'application sont donnés au paragraphe II,5.

Le calcul effectué pas à pas dans le temps avec calcul de la nouvelle géométrie à chaque pas :

$$\epsilon_{v\,i+1} = \epsilon_{v\,i} + \delta\epsilon_i$$

$$\delta\epsilon_i = \delta\epsilon_{ei} + \delta\epsilon_{pi}$$

$$\delta\epsilon_{ei} = \frac{1}{E_v}\,\delta\sigma_i$$

$$\delta\epsilon_{pi} = \left[\frac{\sigma_{vi}}{K_v}\right]^{n_v} \tilde{\epsilon}_{vpi}^{-\frac{n_v}{m_v}}\,\delta t_i$$

conduit à des solutions numériques approchées et il nécessite l'étude de méthodes de calcul spécialement adaptées aux problèmes fortement non-linéaires. Une méthode est proposée et décrite dans un cas particulier tridimensionnel au paragraphe III,4.2.

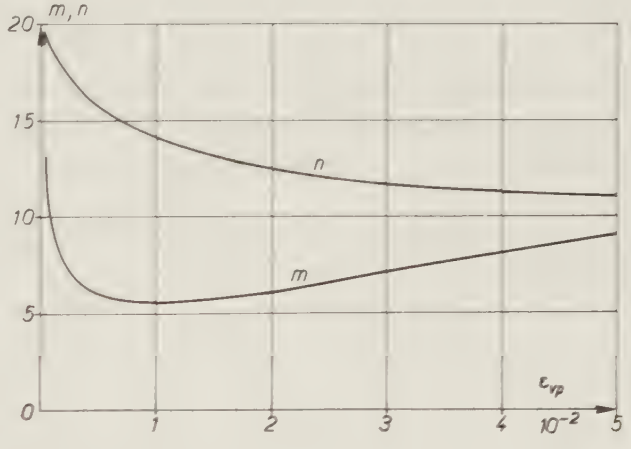


Fig. II,41 - Variation des coefficients d'écrouissage et de viscosité en fonction de la déformation visco-plastique

- Duralumin AU4G recuit
- Température 208,5° C

II,5. Applications particulières

La loi proposée a été utilisée dans un certain nombre d'applications qui constituent autant de vérifications ou d'indications sur les limitations à sa validité.

II,5.1. Domaine d'élasticité, domaine de plasticité

Les formes possibles de la relation $\sigma_v = f_v(\epsilon_{vp}, \dot{\epsilon}_{vp})$ entraînent en toute rigueur la négation de l'existence d'une limite d'élasticité et d'états d'équilibre sous contrainte non nulle puisque :

$$\forall \quad \sigma_v \neq 0 \longrightarrow \begin{cases} \epsilon_{vp} \neq 0 \\ \dot{\epsilon}_{vp} \neq 0 \end{cases}$$

Néanmoins, la loi est tout à fait compatible avec l'existence de domaines pratiques d'élasticité et de plasticité car les fonctions caractéristiques sont telles que, dans certains cas, les déformations visco-plastiques et leurs évolutions peuvent être négligées devant les déformations élastiques.

Limite pratique d'élasticité

Pour les besoins industriels, la normalisation française définit une limite d'élasticité conventionnelle caractérisée par la contrainte correspondant à une déformation permanente en traction simple de $0{,}2\ 10^{-2}$ (fig. II,42).

Pour les matériaux métalliques usuels, cette déformation ϵ_p est de l'ordre de la moitié de la déformation totale ϵ correspondant à la contrainte considérée, ce qui ne saurait convenir pour des études fines. En outre, le temps n'apparaît pas dans la définition.

Lorsqu'une bonne précision est souhaitée, le critère suivant est proposé :

La limite d'élasticité est caractérisée par la contrainte qui, dans un essai de fluage en traction simple, engendre une déformation visco-plastique ϵ_p égale à une fraction Δ de la déformation élastique ϵ_e en un temps correspondant au temps t^* d'utilisation du matériau.

$$\sigma_e = \sigma \ (\epsilon_p = \Delta \epsilon_e, t = t^*)$$

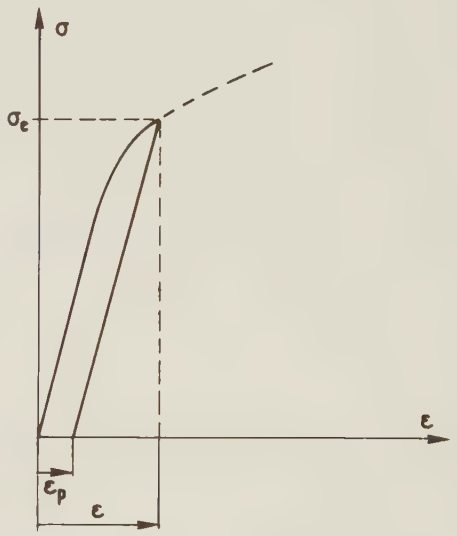


Fig. II,42 - Limite d'élasticité

Δ = 2 à 5 % constitue une bonne précision.
(La limite normalisée correspond à $\Delta \simeq 100$ %).

Comme il est difficilement envisageable d'effectuer autant d'expériences de fluage que de temps d'utilisation possibles, on peut obtenir une expression de la limite σ_e en fonction du temps t^* à l'aide de la loi de comportement :

Les déformations restant de l'ordre de grandeur des déformations élastiques, on utilisera les paramètres «apparents»

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$$

$$\sigma = E \epsilon_e$$

$$\sigma = K \epsilon_p^{\frac{1}{m}} \dot{\epsilon}_p^{\frac{1}{n}}$$

Dans le cas de l'expérience de fluage (σ = cte) et avec la condition initiale :

$$t = 0 \longrightarrow \epsilon_p = 0$$

la résolution de l'équation différentielle non linéaire donne immédiatement :

$$\frac{m}{n+m} \epsilon_p^{\frac{n+m}{m}} = \left[\frac{\sigma}{K}\right]^n t$$

et avec :

$$\sigma = \sigma_e$$

$$t = t^* \longrightarrow \epsilon_p = \Delta\epsilon_e = \Delta \frac{\sigma_e}{E}$$

$$\sigma_e = K^{\frac{1}{1-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}} \left[\frac{m}{n+m}\right]^{\frac{1}{n-\frac{n}{m}-1}} \left[\frac{\Delta}{E}\right]^{\frac{1}{\frac{mn}{n+m}-1}} \frac{1}{t^*}$$

Les coefficients caractéristiques isothermes du matériau étant connus, cette expression permet de calculer la limite d'élasticité dans chaque cas d'application défini par la durée de vie t^* et la précision souhaitée Δ.

Dans le cas des aciers ordinaires «à palier» à la température ambiante :

$$\left.\begin{array}{l} m >> 1 \\ n >> 1 \end{array}\right\} \longrightarrow \sigma_e \simeq K \quad \forall t^*$$

ce qui était évident a priori d'après la forme de la loi de comportement adoptée.

Dans le cas de l'acier Z10 CNT 18 à la température de 800°C

$E = 13\,800$ daN/mm^2

$K = 40$ unités MKSa

$m = 6$

$n = 13$

$\Delta = 10\ \% \longrightarrow 2$ daN/mm$^2 \leq \sigma_e \leq 0{,}45$ daN/mm^2 pour 10 s $\leq t \leq$ 1 an

La normalisation donne une valeur de

$$\sigma_e\ (\epsilon_p = 0{,}2\ 10^{-2}) \simeq 7 \text{ daN/mm}^2$$

ce qui peut être retrouvé par la formule :

$$\Delta \ \# \ 300\ \% \longrightarrow \sigma \ \# \ 6{,}9 \text{ daN/mm}^2 \text{ pour } t = 3 \text{ s } (\dot{\epsilon} \simeq 10^{-3}\ s^{-1})$$

Frontières entre les domaines pratiques d'élasticité, de plasticité et de fluage

Sur le même principe que le calcul précédent **J.C. Bonnin** [70] a déterminé, en fonction de l'utilisation envisagée, les frontières entre les domaines où l'on peut raisonnablement appliquer la théorie de l'élasticité, une théorie de plasticité ou une théorie de fluage.

Dans le cas d'un élément travaillant en fluage, c'est-à-dire à portance imposée constante σ^* pendant un temps d'utilisation t^*, les domaines élasticité-plasticité et plasticité-fluage sont définis respectivement par :

$$\frac{\epsilon(t^*) - \epsilon^*_{e\ell}}{\epsilon^*_{e\ell}} \leq \Delta$$

$$\frac{\epsilon(t^*) - \epsilon^*_{p\ell}}{\epsilon^*_{p\ell}} \leq \Delta$$

où ϵ est la déformation, au temps $t = t^*$, calculée par la loi de comportement élasto-visco-plastique supposée représenter la réalité

$\epsilon^*_{e\ell}$ est la déformation élastique correspondante

$\epsilon^*_{p\ell}$ est la déformation totale calculée par une théorie de plasticité, ici simplement

$$\epsilon^*_{p\ell} = \epsilon_e + \epsilon_p$$

$$\sigma = E\epsilon_e$$

$$\sigma = K' \epsilon_p^{\frac{1}{m}}$$

(K' et m définissant la courbe d'écrouissage)

Dans le cas d'un élément travaillant en relaxation, c'est-à-dire à serrage imposé constant ϵ^* pendant un temps d'utilisation t^*, les domaines élasticité-plasticité-fluage sont définis par :

$$\frac{\sigma_{el}^* - \sigma_{(t^*)}}{\sigma_{el}^*} \leq \Delta$$

$$\frac{\sigma_{pl}^* - \sigma_{(t^*)}}{\sigma_{pl}^*} \leq \Delta$$

σ , σ_{el}^* , σ_{pl}^* ayant des définitions homologues aux définitions des déformations précédentes.

Les résultats qui peuvent être exprimés dans les plans (σ^*, t^*) ou (ϵ^*, t^*) sont les suivants :

- Portance imposée :

frontière élasticité-plasticité :

$$t^* = \frac{m}{n+m} \left[\frac{\Delta\sigma^*}{E}\right]^{\frac{n+m}{m}} \left[\frac{\sigma^*}{K'}\right]^{-n}$$

frontière plasticité-fluage :

$$t^* = \frac{m}{n+m} \left[\frac{\sigma^*}{K}\right]^{-n} \left[\left[1+\Delta\right]\left[\frac{\sigma^*}{K'}\right]^{m} + \Delta \frac{\sigma^*}{E}\right]^{\frac{n+m}{m}}$$

- Serrage imposé :

frontière élasticité-plasticité

$$t^* \# \frac{K^n \epsilon^{*\frac{n}{m}}}{E\left[n-1\right]} \left[\frac{1}{\left[E\epsilon^*\left[1-\Delta\right]\right]^{n-1}} - \frac{1}{\left[E\epsilon^*\right]^{n-1}}\right]$$

frontière plasticité-fluage

$$t^* \# \frac{K^n \epsilon^{*\frac{n}{m}}}{E\left[n-1\right]} \left[\frac{1}{\left[K'\epsilon^{*\frac{1}{m}}\left[1-\Delta\right]\right]^{n-1}} - \frac{1}{\left[K'\epsilon^{*\frac{1}{m}}\right]^{n-1}}\right]$$

deux exemples sont donnés sur les figures II,43 et II,44.

Ces résultats sont très intéressants car ils aboutissent à une conclusion assez peu connue. En général, le domaine d'application de la plasticité est très réduit, ce qui est très net sur les figures, et dans la pratique, les calculs de résistance qui ne peuvent être effectués en élasticité devraient être effectués à l'aide d'une théorie de fluage.

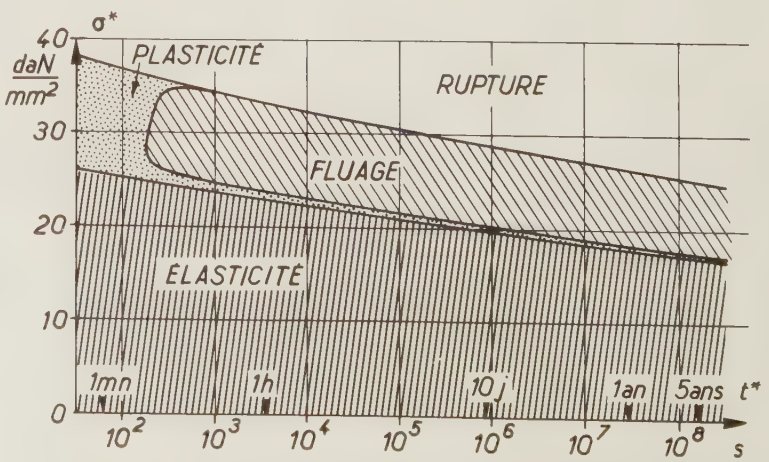


Fig. II,43 - Domaines d'application, élasticité plasticité, fluage dans le cas d'une marge d'erreur Δ = 5 %

- Duralumin AU4G trempé vieilli
- Température 150° C

Remarque :

Il est toujours possible d'effectuer un calcul de plasticité à condition que la courbe d'écrouissage de référence soit obtenue à une vitesse qui corresponde au temps d'utilisation envisagé (malheureusement des essais d'écrouissage d'une durée supérieure à la journée ne sont guère envisageables).

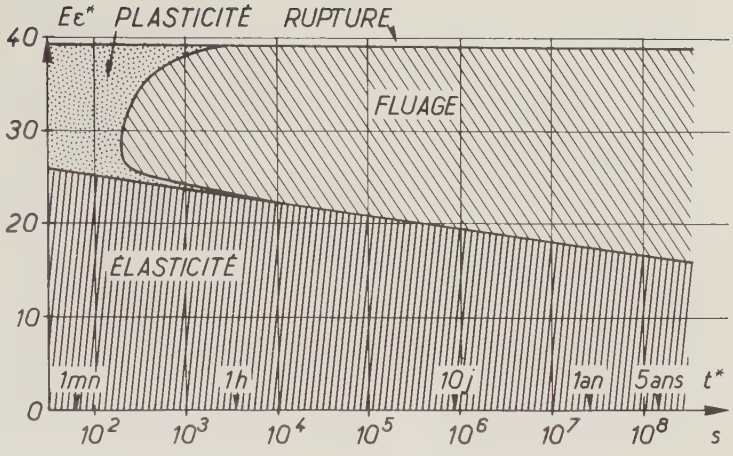


Fig. II,44 - Domaines d'application, élasticité, plasticité, fluage dans le cas d'un serrage imposé pour une marge d'erreur $\Delta = 5\ \%$
- Duralumin AU4G trempé vieilli
- Température 150° C

II,5.2. Amortissement interne des matériaux

L'amortissement interne des matériaux métalliques a des causes physiques intrinsèques variées qu'il est possible de traduire globalement par une viscosité reliée aux paramètres d'état, caractéristiques du comportement de l'élément de volume. La loi de comportement proposée a été utilisée pour savoir dans quelle mesure la fonction de viscosité de fluage pouvait rendre compte de cet amortissement.

Définition

Du point de vue mécanique, l'amortissement interne peut être défini de plusieurs manières. On adopte ici celle qui a été retenue par le Groupe Français de Rhéologie [71].

Considérons, sur un élément de volume ou une éprouvette, une sollicitation unidimensionnelle harmonique σ définie par :

$$\sigma = \sigma_M \sin \omega t$$

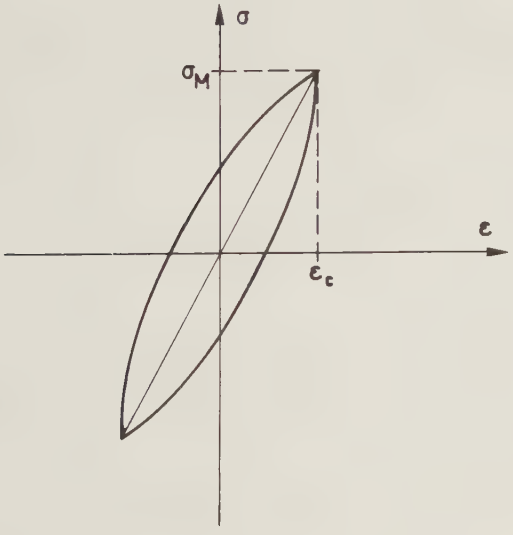


Fig. II,45 - Cycle d'hystérésis dans le plan σ, ϵ

Il est supposé que le cycle résultant dans le plan (σ, ϵ) est un cycle stabilisé, (fig. II,45).

Si : $\epsilon_c = \epsilon(\sigma_M)$ (mesuré par rapport au centre du cycle)

$$W_M = \frac{1}{2} \epsilon_c \sigma_M$$

ΔW = aire du cycle

L'amortissement de cet élément de volume est caractérisé par le « coefficient de frottement intérieur » C_f défini par :

$$C_f = \frac{\Delta W}{W_M}$$

Calcul du coefficient C_f

Hypothèse : L'amortissement interne des matériaux métalliques est provoqué par des mouvements de dislocations ou autres mécanismes de même nature que ceux qui se traduisent par le fluage [72].
Cette hypothèse entraîne le corollaire suivant :

On supposera qu'une loi de comportement valable dans la gamme des déformations de fluage appréciables rend compte de ces « micro fluages » non mesurables.

Pour ce calcul,qui met en jeu des petites déformations avec retours en arrière et compression, la loi de comportement est mise sous la forme différentielle en grandeurs «apparentes» :

$$d\epsilon = d\epsilon_e + d\epsilon_p$$

$$d\epsilon_e = \frac{d\sigma}{E}$$

$$d\epsilon_p = \left[\frac{\sigma}{K}\right]^n \tilde{\epsilon}_p^{-\frac{n}{m}} dt \quad , \quad \tilde{\epsilon}_{p(t)} = \int_o^t |\dot{\epsilon}_p|_{(t)} dt$$

L'aire du cycle ΔW qui représente l'énergie totale dissipée au cours d'un cycle peut être décomposée en deux :

$$\Delta W = \Delta W_e + \Delta W_p$$

ΔW_e : énergie élastique récupérable, donc nulle pour un cycle

ΔW_p : énergie correspondant au travail des forces de visco-plasticité

$$\Delta W = \Delta W_p = \int_{1 \text{ cycle}} \sigma \, d\epsilon_p$$

Le calcul de ΔW_p peut être simplifié par les remarques suivantes :

Examinons un cycle quasi stabilisé dans le plan σ, ϵ_p (fig. II,46).

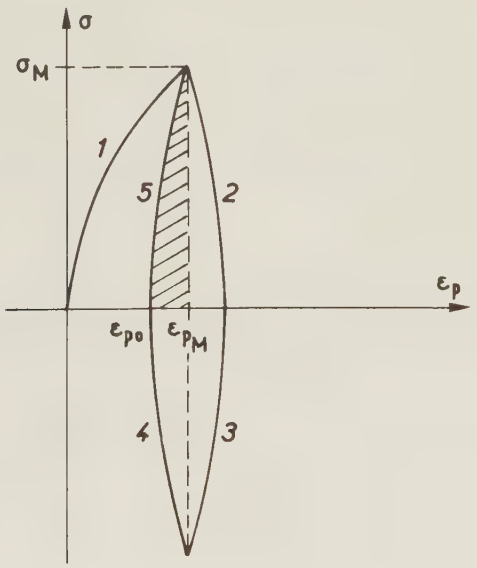


Fig. II,46 - Cycle d'hystérésis dans le plan σ, ϵ_p

Trajet 1 - Il correspond à la déformation permanente du premier quart de cycle calculable par la loi de comportement.

Trajet 2 - Il correspond au retour élastique et à un certain fluage, donné par la loi de comportement différentielle.

Trajet 3 - Il correspond à une déformation de compression que la loi de comportement permet de calculer.

Trajets 4 et 5 - Mêmes remarques que pour les trajets 2 et 3.

Si l'on suppose que la déformation permanente varie peu au cours du cycle, la forme de la loi de comportement et les remarques précédentes permettent de conclure que l'aire du cycle est peu différente de 4 fois l'aire correspondant au trajet 5.

Soient ϵ_{p0} et ϵ_{pM} les déformations permanentes correspondant au début et à la fin du trajet 5 :

$$\Delta W = \Delta W_p = 4 \int_{\epsilon_{p0}}^{\epsilon_{pM}} \sigma \, d\epsilon_p$$

Calcul de ϵ_{pM} : il correspond au trajet 1 de traction donc pour lequel $\tilde{\epsilon}_p \equiv \epsilon_p$

L'équation différentielle de comportement à résoudre est de la forme :

$$d\epsilon_p = \left[\frac{\sigma_M \sin \omega t}{K}\right]^n \epsilon_p^{-\frac{n}{m}} dt$$

cette équation à variables séparées s'intègre immédiatement avec les conditions :

$$t = 0 \longrightarrow \epsilon_p = 0$$

$$t = \frac{\pi}{2\omega} \longrightarrow \epsilon_p = \epsilon_{pM}$$

$$\epsilon_{pM} = \left[\frac{n+m}{m} \left[\frac{\sigma_M}{K} \right]^n \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} \sin^n \omega t \, dt \right]^{\frac{m}{n+m}}$$

Le calcul de ΔW peut être conduit jusqu'au bout mais la formule finale est d'une telle complexité qu'elle est inutilisable; nous préférons faire l'hypothèse simplificatrice suivante : nous supposons qu'au cours du cycle l'effet de l'écrouissage est négligeable, ce qui entraîne :

$$\epsilon_p^{\frac{1}{m}} \# \text{ cte} = \epsilon_{pM}^{\frac{1}{m}}$$

d'où

$$\Delta W \# 4 \int_{\epsilon_{p0}}^{\epsilon_{pM}} \sigma_M \sin \omega t \left[\frac{\sigma_M \sin \omega t}{K} \right]^n \epsilon_{pM}^{-\frac{n}{m}} \, dt$$

et, en posant $\omega t = x$:

$$\Delta W \# 4 \sigma_M \left[\frac{\sigma_M}{K} \right]^n \epsilon_{pM}^{-\frac{n}{m}} \frac{1}{\omega} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \, dx$$

L'énergie maximale $W_M = \frac{1}{2} \epsilon_c \sigma_M$ s'obtient immédiatement puisqu'avec les hypothèses faites et la loi de comportement adoptée (fig. II,47) :

$$\epsilon_c = \epsilon_M - \epsilon_{pM} = \epsilon_{eM} = \frac{\sigma_M}{E}$$

$$W_M = \frac{1}{2} \epsilon_{eM} \sigma_M = \frac{1}{2} \frac{\sigma_M^2}{E}$$

On peut alors calculer $C_f = \frac{\Delta W}{W_M}$

$$C_f \# \frac{8}{\omega} \frac{\left[\frac{\sigma_M}{K} \right]^n \epsilon_{pM}^{-\frac{n}{m}}}{\frac{\sigma_M}{E}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \, dx$$

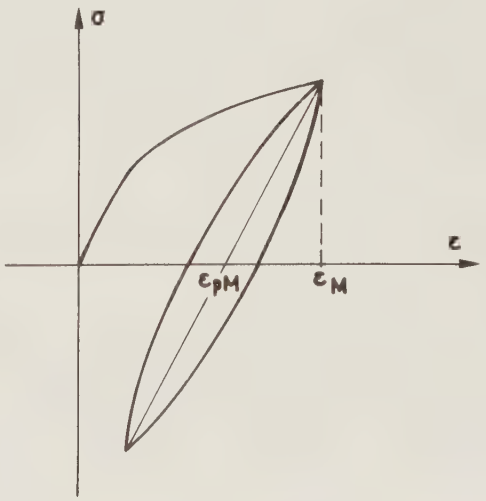


Fig. II,47 - Cycle d'hystérésis après déformation permanente

avec :

$$\epsilon_{pM} = \left[\frac{n+m}{m} \left[\frac{\sigma_M}{K} \right]^n \frac{1}{\omega} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \right]^{\frac{m}{n+m}}$$

ou en appelant $\dot{\epsilon}_{p_M}$ la vitesse de déformation permanente au sommet du cycle :

$$\dot{\epsilon}_{p_M} = \dot{\epsilon}_p\,(\sigma = \sigma_M) = \left[\frac{\sigma_M}{K}\right]^n \epsilon_{p_M}^{-\frac{n}{m}}$$

$$C_f \# \frac{8}{\omega} \frac{\dot{\epsilon}_{p_M}}{\frac{\sigma_M}{E}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \, dx$$

Finalement

$$C_f \# \sigma_M^{-1+\frac{mn}{m+n}} \omega^{-\frac{m}{m+n}} \left[8\, E\, K^{-\frac{mn}{m+n}} \left[\frac{m+n}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx\right]^{-\frac{n}{m+n}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x \, dx \right]$$

Ces formules sont à rapprocher d'un résultat obtenu par **C. Salceanu** et **S. Varga** [73] sur la base de la théorie des dislocations :

$$C_f = A_s + B_s \dot{\epsilon}_p$$

où : A_s dépend de la densité de dislocations permanentes mobiles et est lié à l'existence d'une limite d'élasticité

B_s dépend de l'énergie d'activation, donc d'une certaine manière, de la sollicitation et de constantes physiques du matériau.

D'autre part, l'expression trouvée est en bon accord avec un certain nombre de propriétés qualitatives bien connues :

– D'après **Lazan** [74] et **Marin** [75] le coefficient de frottement intérieur varie comme la contrainte à une puissance de l'ordre de 1 à 6.

Ici : $$C_f \sim \sigma_M^{\frac{nm}{n+m}-1}$$

les valeurs usuelles de m et n situent effectivement l'exposant dans cet ordre de grandeur.

– D'après la formule trouvée C_f dépend de la pulsation ω comme

$$C_f \sim \omega^{-\frac{m}{n+m}}$$

Là encore, les valeurs usuelles de m et n montrent que C_f diminue (mais peu) lorsque la fréquence augmente, ce qui est conforme aux résultats expérimentaux.

– La variation des coefficients E, K, m et n avec la température montre que C_f augmente avec ce paramètre.

Les résultats quantitatifs sont moins significatifs car le calcul de C_f s'avère extrêmement sensible à de petites variations des coefficients caractéristiques m et n .

Les quelques exemples suivants n'ont pu être traités avec précision car les coefficients caractéristiques ou les conditions de sollicitation (σ_M) n'étaient connus qu'approximativement :

Exemple 1 - Acier Z 10 CNT 18, température 800° C

$$C_f \text{ mesuré} \simeq 0{,}2\ 10^{-2} \qquad [76]$$

$$0{,}06\ 10^{-2} < C_f \text{ calculé} < 0{,}3\ 10^{-2}$$

avec $\begin{cases} K = 30 \text{ u.MKSA} \\ m = 4 \\ n = 13 \end{cases}$ pour $0{,}01\ 10^{-2} < \epsilon_p < 0{,}2\ 10^{-2}$

Exemple 2 - Aluminium pur, température 20° C

$$C_f \text{ mesuré} \simeq 0{,}12\ 10^{-2} \quad [77]$$

$$0{,}02\ 10^{-2} < C_f \text{ calculé} < 0{,}67\ 10^{-2}$$

avec : $\begin{cases} K = 14 \text{ u.MKSA} \\ m = 4 \\ n = 35 \end{cases}$ pour $0{,}01\ 10^{-2} < \epsilon_p < 0{,}2\ 10^{-2}$

Exemple 3 - La figure II,48 montre comment varie le coefficient C_f en fonction de la sollicitation et de la fréquence dans le cas d'un *duralumin à une température de 200° C.*

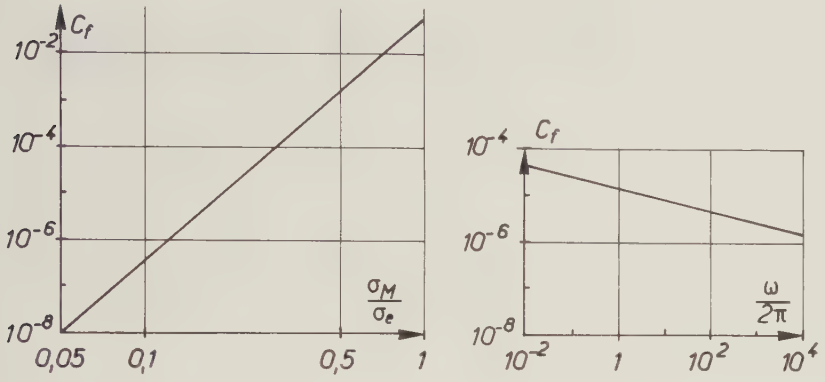


Fig. II,48 - Variation du coefficient d'amortissement interne en fonction de l'amplitude σ_M (rapportée à la limite d'élasticité classique) et de la fréquence.

- Calcul d'après les caractéristiques du Duralumin AU4G recuit
- Température 200° C

Ces résultats apportent un élément de plus en faveur de l'existence de liens étroits entre les mécanismes qui régissent le fluage et le frottement intérieur [78] et sont à rapprocher d'études concernant l'amortissement engendré par le phénomène de fluage [79-80].

Ils montrent que la loi utilisée donne encore de bons résultats pour les faibles valeurs de la déformation viscoplastique de l'ordre de $0{,}01\ 10^{-2}$.

II,5.3. Problème de la durée de vie

En mécanique des solides, il est classique de considérer schématiquement deux sortes de rupture :

– la rupture fragile essentiellement liée à l'existence d'une contrainte limite locale «de décohésion»,

– la rupture ductile qui est un processus d'instabilité. Pour une force extérieure constante, un accroissement de déformation entraîne un accroissement de contrainte vraie. Dans le domaine du fluage établi, cet accroissement de contrainte engendre un accroissement de vitesse de déformation, créant ainsi un processus auto-accélérant toujours localisé dans la pratique.

J.C. Bonnin [70] a utilisé la loi de comportement suivante :

$$\epsilon_v = \epsilon_{ve} + \epsilon_{vp}$$

$$\sigma_v = E_v\ \epsilon_{ve}$$

$$\sigma_v = \Lambda_v \psi(\epsilon_{vp}) \cdot \dot{\epsilon}_{vp}^{\frac{1}{n_v}} \quad \text{avec } \psi \to 1 \text{ pour } \epsilon_{vp} \to \infty$$

pour améliorer la prévision de la rupture ductile en traction simple dans un calcul effectué initialement par **N.J. Hoff** [81] avec la loi simple :

$$\dot{\epsilon}_{vp} = \left[\frac{\sigma_v}{\lambda_N}\right]^{n_N}$$

Un cylindre de section et longueur initiales S_0 et L_0 est sollicité en traction simple par une force constante F ; la durée de vie est définie par le temps t_R au bout duquel la rupture ductile parfaite est atteinte :

$$S \to 0 \quad , \quad L \to \infty$$

Ceci entraîne :

$$\epsilon_{vp}\ (t_R) \rightarrow \infty$$

En posant $\sigma_0 = \frac{F}{S_0}$, le résultat est :

$$t_R = \left[\frac{\Lambda_v}{\sigma_0} - \frac{\Lambda_v}{E_v}\right]^{n_v} \int_0^{\infty} \left[\frac{\psi(\epsilon_{vp})}{1+\epsilon_{vp}}\right]^{n_v} d\epsilon_{vp}$$

Le résultat trouvé par **N.J. Hoff** $\left(t_{RH} = \frac{1}{n_N} \left[\frac{\lambda_N}{\sigma_0}\right]^{n_N} \right)$ donnait des différences relatives, par rapport à l'expérience, de l'ordre de 50 à 100 % par excès ; la formule de **J.C. Bonnin** permet d'abaisser cette différence à 10 à 20 % [70], ceci grâce à l'introduction du fluage primaire par l' intermédiaire de la fonction ψ .

II,5.4. Calcul des poutres en fluage

Une étude importante, constituant une application des lois développées ici, a été effectuée à l'O.N.E.R.A. par **H. Berger** [82] sur les poutres en grands déplacements et grandes déformations de fluage. Deux types de calculs ont été effectués, l'un en flexion circulaire, l'autre en flexion simple sur une poutre cantilever présentant une région affaiblie près de l'encastrement.

La loi de comportement adoptée pour le calcul pas à pas est la suivante :

$$d\epsilon = d\epsilon_e + d\epsilon_p$$

$$d\epsilon_e = \frac{d\sigma}{E}$$

$$d\epsilon_p = \left[\frac{\sigma}{\Lambda}\right]^n \left[\psi(\epsilon_p)\right]^{-n} dt$$

La méthode de calcul est une méthode par maillage et pas à pas. Les équations sont les équations classiques des poutres, elles reposent sur les deux hypothèses suivantes :

- les sections initialement planes restent planes et indéformables
- le comportement en grandeurs «apparentes» est identique au signe près en traction et compression.

En flexion circulaire, si $C(t)$ est le moment appliqué, $\dot{I}$ le moment d'inertie de la section rectangulaire de hauteur $2h$, $(u = \frac{z}{h})$, l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\int_0^1 \sigma(u,t)\, u\, du = \frac{h}{3\dot{I}}\, C(t)$$

et compte tenu de l'hypothèse cinématique :

$$\epsilon(u,t) = h\rho(t)u$$

(ρ étant la courbure)

Le système d'équations à résoudre est :

$$\dot{\epsilon}_p(u,t) = \left[\frac{\sigma(u,t)}{\Lambda\, \psi(\epsilon_p)}\right]^n$$

$$\sigma(u,t) = E\left[h\rho(t)u - \epsilon_p(u,t)\right]$$

$$\rho(t) = \frac{C(t)}{E\dot{I}} + \frac{3}{h} \int_0^1 \epsilon_p(u,t)\, du$$

Le principe du calcul pas à pas est le suivant :

$\epsilon_p(u,t)$ et $\rho(t)$ étant connus au temps t, on peut calculer $\sigma(u,t)$ et $\dot{\epsilon}_p(u,t)$

Au temps $t + \delta t$, ϵ_p s'obtient par développement limité au premier ordre :

$$\epsilon_p(u, t + \delta t) = \epsilon_p(u,t) + \delta t \, \dot{\epsilon}_p(u,t)$$

C étant donné au temps $t + \delta t$, la 3ème équation permet de calculer $\rho(t + \delta t)$. La température peut éventuellement varier à chaque pas.

En fait, la grande non linéarité du calcul pose le problème du choix du pas δt pour que le développement limité au premier ordre reste valable et que la méthode converge. **H. Berger** a imaginé une méthode qui conduit à un choix optimal de δt, réalisant un compromis entre l'obtention d'une solution proche de la solution rigoureuse et un volume de calcul compatible avec un temps d'occupation d'ordinateur raisonnable.

En flexion simple sur poutre affaiblie (fig. II,49) le principe de la méthode est identique.

La poutre est décomposée en mailles suivant l'axe, chacune d'elles étant supposée travailler en flexion circulaire.

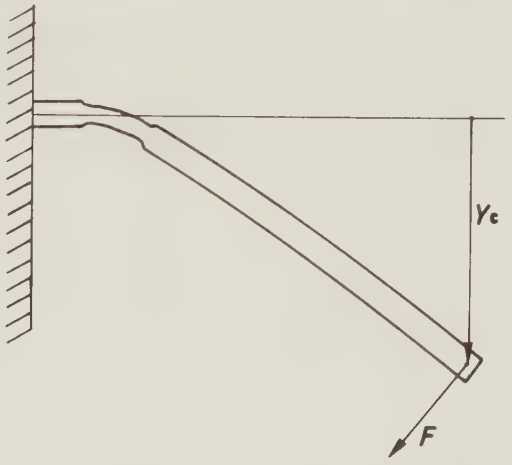


Fig. II,49 - Flexion simple d'une poutre affaiblie

Quelques exemples des résultats obtenus sont consignés sur les figures II,50 - II,51 et II,52 où les résultats de calcul sont comparés aux expériences correspondantes.

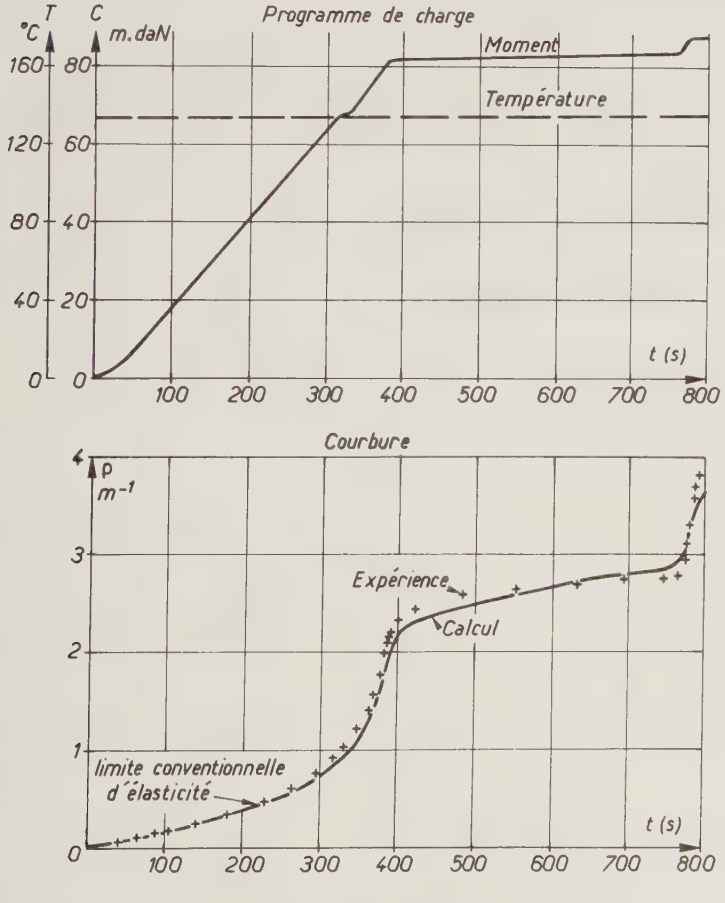


Fig. II,50 - Flexion circulaire d'une poutre
Alliage AU2GN - Température 130° C

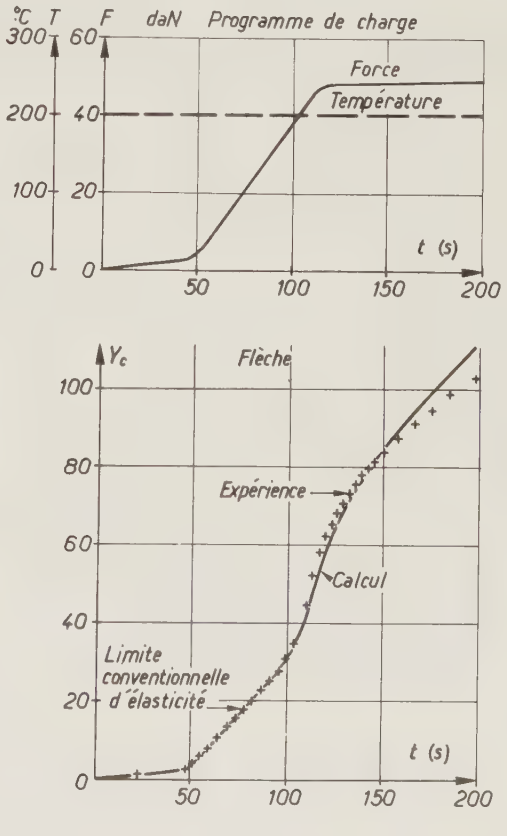


Fig. II,51 - Flexion simple d'une poutre affaiblie
- Duralumin AU4G trempé vieilli
- Température 200° C

Dans le cas de la flexion simple sur poutre affaiblie, les programmes de charge et de température sont sévères, on est très loin de sollicitations stationnaires et la bonne concordance des résultats constitue une confirmation remarquable de la validité de la loi de comportement et de la méthode de calcul associée.

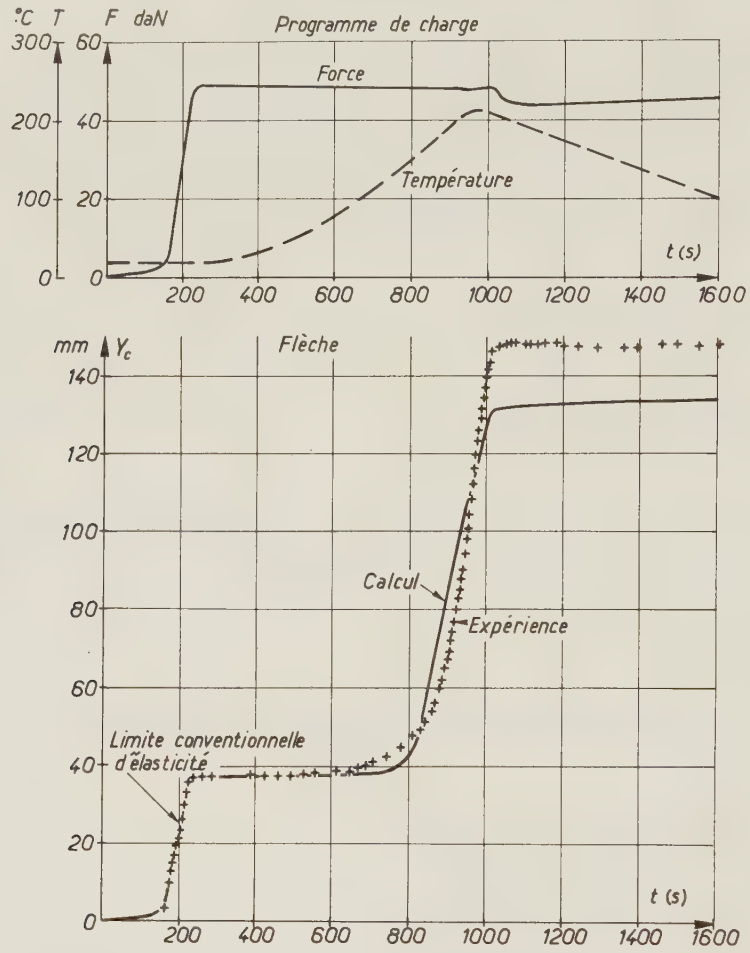


Fig. II,52 - Flexion simple d'une poutre affaiblie

- Duralumin AU4G trempé vieilli
- Température variable 20-215° C

CHAPITRE III

LOIS TRIDIMENSIONNELLES

III,1. Extension des résultats unidimensionnels au cas tridimensionnel

Les considérations développées au chapitre I ne permettent en général pas d'établir directement des lois de comportement tridimensionnelles applicables aux problèmes de résistance des structures. Le chemin couramment suivi est l'extension au cas tridimensionnel des résultats unidimensionnels qui reposent sur des bases expérimentales solides, mais qui ne renseignent pas sur le caractère multiaxial du phénomène. Ceci explique que cette généralisation n'ai pu être établie jusqu'alors que dans le cadre d'hypothèses restrictives.

III,1.1. Hypothèses

Homogénéité : Nous nous plaçons dans le cadre de l'hypothèse des milieux continus ; le corps est homogène ou homogène par morceau, de telle sorte qu'on puisse toujours considérer des mailles homogènes sur lesquelles la loi de comportement est définie au niveau de l'élément de volume.

Stabilité : Le corps est stable au sens de la définition du paragraphe II,2.1, la loi de comportement est invariante par une translation dans le temps - (principe d'objectivité).

Isotropie : La limitation introduite la plus importante est l'hypothèse d'isotropie : le corps est supposé isotrope quel que soit l'état de déformation. En fait, toute déformation irréversible engendre une anisotropie par les mécanismes de glissements cristallographiques mis en jeu (voir paragraphe I,3.1). Elle se traduit :

- par une «anisotropie initiale», si l'état initial n'est pas l'état vierge mais un état écroui lors de l'élaboration (laminage, forgeage,....)
- par une anisotropie «d'écrouissage», et peut-être «de viscosité», qui se développe en fonction de l'état de déformation.

Dans le cas de la plasticité, l'existence d'une surface limite permet de tenir compte de cette anisotropie par des théories plus ou moins complexes et applicables à des cas concrets :

- Loi de **Prandt-Reuss** en écrouissage isotrope pour un matériau initialement anisotrope [83]
- Théories de l'écrouissage anisotrope :
  - théorie de la translation de la surface limite [84]
  - théorie des potentiels multiples [85]
  - théorie des critères multiples liés [86]

Par contre, la visco-plasticité anisotrope constitue un champ d'investigation à peine exploré à cause des grandes difficultés théoriques de départ [87].

Quoi qu'il en soit, l'hypothèse d'isotropie est acceptable lorsque les déformations visco-plastiques sont petites. Des études expérimentales effectuées en plasticité [86] [88] ont montré que les surfaces limites successives restaient homothétiques, tant que les déformations plastiques ne dépassaient pas un ordre de grandeur de 1 à 2 fois les déformations élastiques ; nous pouvons raisonnablement étendre ces résultats qui couvrent de nombreuses applications au cas des déformations visco-plastiques. Dans le domaine des déformations visco-plastiques plus importantes, les lois isotropes ne sont valables, en toute rigueur, que dans le cas du chargement simple (invariance des directions principales du tenseur des contraintes) qui est d'une grande importance pratique (voir paragraphe III,2.4).

Incompressibilité visco-plastique - Cette hypothèse contient les deux hypothèses énoncées à la fin du chapitre I.

- Les déformations visco-plastiques n'engendrent pas de variation de volume
- L'état de déformation visco-plastique est indépendant de tout état de contrainte isotrope.

Hypothèse des petites déformations - Les équations développées ne traduiront qu'une faible variation de la géométrie de la structure étudiée par rapport à l'état de référence évolutif :

$$\text{géométrie } (t + \delta t) = \text{géométrie } (t) + \text{variation de géométrie } (\boldsymbol{\epsilon}(\delta t))$$

III,1.2. Théorie de l'élasto-visco-plasticité isotherme

La première relation fondamentale est la relation de partition de la déformation développée au chapitre I.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_e + \boldsymbol{\epsilon}_p$$

$\boldsymbol{\epsilon}$ est le tenseur linéarisé des déformations

$\boldsymbol{\epsilon}_e$ et $\boldsymbol{\epsilon}_p$ sont les tenseurs de déformation élastique et de déformation visco-plastique.

Les hypothèses énoncées suggèrent la décomposition classique du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et des tenseurs $\boldsymbol{\epsilon}_e$ et $\boldsymbol{\epsilon}_p$ en une partie sphérique et un déviateur :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \cdot \mathbf{1} + \mathbf{S} \qquad \text{avec} \qquad \sigma_m = \frac{1}{3} t_r(\boldsymbol{\sigma})$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_e = \epsilon_{em} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{e}_e \qquad \text{avec} \qquad \epsilon_{em} = \frac{1}{3} t_r(\boldsymbol{\epsilon}_e)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_p = \epsilon_{pm} \cdot \mathbf{1} + \mathbf{e}_p \qquad \text{avec} \qquad \epsilon_{pm} = \frac{1}{3} t_r(\boldsymbol{\epsilon}_p)$$

Les déformations élastiques sont reliées aux contraintes, quel que soit l'état visco-plastique, par les équations de l'élasticité que nous supposerons linéaires pour les applications envisagées.

$$\epsilon_{em} = \frac{1-2\nu_{ev}}{E_v} \sigma_m$$

$$\mathbf{e}_e = \frac{1+\nu_{ev}}{E_v} \mathbf{S}$$

E_v et ν_{ev} étant le module d'**Young** et le coefficient de **Poisson.**

L'hypothèse d'incompressibilité visco-plastique entraine :

$$\epsilon_{pm} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\sigma}$$

$$\exists \mathbf{e}_p \quad \forall \sigma_m$$

L'équation de visco-plasticité, dont l'existence est postulée, repose sur les principes suivants :

- Les phénomènes irréversibles ne peuvent être décrits par des relations entières ; seules des relations entre accroissements sont possibles [47]. Nous écrivons :

$$d\boldsymbol{\epsilon}_p = d\mathbf{e}_p = \mathbf{H} \cdot dt$$

- Par analogie avec la loi de **Prandt-Reuss** en plasticité, et la loi d'**Odqvist** en fluage établi [19], les accroissements de déformation visco-plastique ont mêmes directions que les contraintes : les tenseurs $d\mathbf{e}_p$ et $\mathbf{S}$ sont colinéaires :

$$d\mathbf{e}_p = \mathcal{H} \cdot \mathbf{s} \cdot dt$$

- Si l'on se limite au cas isotherme quasi-statique, d'après les considérations du chapitre I, la loi mécanique d'état que nous cherchons ne peut faire intervenir que les paramètres contrainte, déformation visco-plastique et vitesse de déformation visco-plastique :

$\mathcal{H}$ est une fonctionnelle de $\mathbf{S}$ et $\mathbf{e}_p$

- L'hypothèse d'isotropie permet de choisir pour $\mathcal{H}$ une fonctionnelle à valeur scalaire invariante par changement de base $(\mathcal{H}_1)$, ce qui entraine qu'elle ne dépend que des invariants de $\mathbf{S}$ et de $\mathbf{e}_p$:

$$s_I = tr(\mathbf{S}) = 0 \qquad e_{pI} = tr(\mathbf{e}_p) = 0$$

$$s_{II} = \left[tr(\mathbf{S}^2)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad e_{pII} = \left[tr(\mathbf{e}_p^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$s_{III} = |\mathbf{S}| \qquad e_{pIII} = |\mathbf{e}_p|$$

$\mathcal{H}_1$ est une fonctionnelle de s_{II} , s_{III} , e_{pII} , e_{pIII}

- La loi tridimensionnelle doit contenir la loi unidimensionnelle développée au chapitre II. Si l'on exclut les retours en arrière, ceci ne peut être vérifié que si la fonctionnelle $\mathcal{H}_1$ se réduit à une fonction H_1 des valeurs instantanées des invariants.

$$d\mathbf{e}_p = H_1(s_{II}, s_{III}, e_{pII}, e_{pIII})\,\mathbf{S}\,dt$$

- H_1 a une signification physique bien précise ; cette fonction traduit l'état rhéologique du matériau, c'est-à-dire sa capacité de réponse en vitesse de déformation visco-plastique $\frac{d\mathbf{e}_p}{dt}$ à une sollicitation $\mathbf{S}$. La question de savoir si les troisièmes invariants de $\mathbf{S}$ et de $\mathbf{e}_p$ interviennent ou non dans les phénomènes de visco-plasticité est très discutée. La seule certitude que l'on ait est que leur influence est faible [29] ; elle sera négligée dans la suite de ce développement sans, toutefois, que la possibilité d'introduire des fonctions de s_{III} et e_{pIII} soit exclue.

$$d\mathbf{e}_p = H\,(s_{II}, e_{pII})\,\mathbf{S}\,dt$$

Cette loi constitue une généralisation de la loi d'**Odqvist-Hoff** [35] , elle peut être rapprochée de la loi différentielle générale proposée par **R. Valid** [89] sans toutefois pouvoir s'en déduire :

$$\mathbf{S}\,ds_{II} = f_1 . d\mathbf{e}_p + f_2 . d\dot{\mathbf{e}}_p$$

f_1 et f_2 étant deux opérateurs linéaires dépendant de l'état du matériau.

- Cas des retours en arrière - La définition d'un retour en arrière en visco-plasticité tridimensionnelle anisotrope pose des problème théoriques non résolus ; par contre, dans le cadre de l'isotropie, le retour en arrière visco-plastique peut être défini simplement par prolongement de la définition introduite pour le cas unidimensionnel : Il y a retour en arrière visco-plastique si la vitesse :

$$\dot{e}_{pII} = \frac{d}{dt}\left(\left[tr\,(\mathbf{e}_p^2)\right]^{\frac{1}{2}}\right)$$

change de signe. Par extension de l'étude unidimensionnelle du paragraphe II,2.1.2, la loi sera supposée valable en décharge et en retour en arrière visco-plastique à la condition de remplacer le paramètre e_{pII} par le paramètre $\tilde{e}_{pII}$ défini par analogie avec le paramètre unidimensionnel de cumulation $\tilde{\epsilon}_p$

$$\tilde{e}_{pII}(t, t_0) = \int_{t_0}^{t} |\dot{e}_{pII}|\,dt$$

L'application du paragraphe III,4 constitue une tentative pour justifier l'introduction de ce paramètre de cumulation.

En résumé, la loi de comportement élasto-visco-plastique tridimensionnelle adaptée au calcul pas à pas s'exprime par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_m \mathbf{1} + \mathbf{s} \qquad \sigma_m = \frac{1}{3} t_r(\boldsymbol{\sigma}), \quad s_{II} = \left[t_r(\mathbf{s}^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_e = \epsilon_{em} \mathbf{1} + \mathbf{e}_e \qquad \epsilon_{em} = \frac{1}{3} t_r(\boldsymbol{\epsilon}_e), \quad e_{pII} = \left[t_r(\mathbf{e}_p^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_p = \mathbf{e}_p \qquad \tilde{e}_{pII}(t, t_o) = \int_{t_o}^{t} \left| \dot{e}_{pII} \right| dt$$

$$d\boldsymbol{\epsilon} = d\boldsymbol{\epsilon}_e + d\boldsymbol{\epsilon}_p$$

$$d\epsilon_{em} = \frac{1 - 2\nu_{ev}}{E_v} d\sigma_m$$

$$d\mathbf{e}_e = \frac{1 + \nu_{ev}}{E_v} d\mathbf{s}$$

$$d\mathbf{e}_p = H(s_{II}, \tilde{e}_{pII})\, \mathbf{s}\, dt$$

Cette loi est cohérente avec les considérations générales exposées au chapitre I :

Elle constitue un cas particulier de la loi de **J. Zarka**, dans laquelle la densité scalaire de dislocation est exprimée en fonction des variables d'état par la théorie de **E. Kröner** (voir paragraphe I,3.1). Elle est compatible avec les restrictions imposées par la thermodynamique des milieux continus. Sa formulation est conforme aux conclusions d'une étude de **J.H. Lambermont** et **J.F. Besseling** sur la généralisation thermodynamique tridimensionnelle du modèle de **Maxwell** [90]. D'autre part, dans le cas unidimensionnel, elle constitue une intégrale première de la loi différentielle de **J.C. Halley**, pour une certaine classe de fonctions caractéristiques (voir paragraphe I,3.2).

Nous verrons au paragraphe III,4.4 que, dans une application concrète, elle donne des résultats assez voisins de ceux obtenus par la loi intégrale de **A. Souissi** indiquée au paragraphe I,3.3.

III,1.3. Détermination de la fonction d'état

L'hypothèse d'isotropie permet de relier simplement la fonction H aux résultats unidimensionnels. Il se pose toutefois un petit problème car ces résultats doivent être exprimés d'une manière cohérente avec l'utilisation envisagée de la loi. La loi différentielle tridimensionnelle doit être appliquée au cas de traction simple avec la même méthode que celle qui est envisagée pour la structure considérée, c'est-à-dire que la fonction H doit être déterminée sur la base de résultats unidimensionnels exprimés :

- en contrainte et déformation apparentes, pour les calculs effectués sur la géométrie initiale,
- en contrainte et déformation vraies, pour une méthode de calcul pas à pas avec géométrie variable à chaque pas.

On va calculer H, dans ce dernier cas, en appliquant la loi au cas de traction simple défini à chaque instant par la contrainte axiale vraie ϵ_v :

La matrice des contraintes $\underline{\sigma}$ s'écrit :

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_v & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} = \sigma_{vm} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_v}{3} & & \\ & -\frac{\sigma_v}{3} & \\ & & -\frac{\sigma_v}{3} \end{bmatrix}$$

$$s_{II} = \left[t_r(s^2) \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, \sigma_v$$

La matrice des déformations $\underline{\epsilon}$ s'écrit :

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{ve} & & \\ & -\nu_e \epsilon_{ve} & \\ & & -\nu_e \epsilon_{ve} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{vp} & & \\ & -\frac{1}{2}\epsilon_{vp} & \\ & & -\frac{1}{2}\epsilon_{vp} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{e}_{pII} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, \tilde{\epsilon}_{vp}$$

d'où l'écriture de l'équation de visco-plasticité :

$$\begin{bmatrix} d\epsilon_{vp} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\, d\epsilon_{vp} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\, d\epsilon_{vp} \end{bmatrix} = H\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\, \sigma_v \; ; \; \sqrt{\frac{3}{2}}\, \tilde{\epsilon}_{vp} \right) \begin{bmatrix} \frac{2\sigma}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma}{3} \end{bmatrix} dt$$

Cette équation permet de déterminer H par des valeurs numériques d'après des résultats d'essais en traction simple. Si l'on veut particulariser cette fonction par des expressions analytiques simples, on peut la relier aux coefficients unidimensionnels K_v, m_v et n_v définis au paragraphe II,2.1.1 par identification à :

$$d\epsilon_{vp} = \left[\frac{\sigma_v}{K_v} \right]^{n_v} \tilde{\epsilon}_{vp}^{-\frac{n_v}{m_v}}\, dt$$

ou :

$$d\epsilon_{vp} = \frac{3}{2}\, K_v^{-n_v}\, \sigma_v^{n_v-1}\, \tilde{\epsilon}_{vp}^{-\frac{n_v}{m_v}}\, \frac{2}{3}\, \sigma\, dt$$

d'où

$$H = \frac{3}{2}\, K_v^{-n_v}\, \sigma_v^{n_v-1}\, \tilde{\epsilon}_{vp}^{-\frac{n_v}{m_v}}$$

ou

$$H = \frac{3}{2}\, K_v^{-n_v} \left[\sqrt{\frac{3}{2}} \right]^{n_v-1} \left[\sqrt{\frac{2}{3}} \right]^{-\frac{n_v}{m_v}} \left[\sqrt{\frac{2}{3}}\, \sigma_v \right]^{n_v-1} \left[\sqrt{\frac{3}{2}}\, \tilde{\epsilon}_{vp} \right]^{-\frac{n_v}{m_v}}$$

Finalement :

$$H\left(s_{II}, e_{pII} \right) = K_T^{-n_v}\, s_{II}^{n_v-1}\, \tilde{e}_{pII}^{-\frac{n_v}{m_v}}$$

$$\text{avec} \quad K_T^{-n_v} = \left[\frac{3}{2} \right]^{\frac{1}{2}\left[n_v + \frac{n_v}{m_v} + 1 \right]} . K_v^{-n_v}$$

III,1.4. Existence et unicité des solutions

Cette question n'a d'intérêt pratique que si l'on examine l'ensemble d'un problème relatif au calcul d'une structure donnée. Il n'a pas été possible de démontrer l'existence et l'unicité des solutions dans le cas général ; seul le cas du chargement simple a pu être traité, par l'intégration de la loi étudiée (paragraphe III,2.1.4) et par l'étude de la convergence de l'itération effectuée au paragraphe III,4.2.2 dans le cas de l'application au calcul d'un cylindre.

Néanmoins, pour examiner le cas de l'élément de volume dans les cas de non retour en arrière, supposons que le tenseur des contraintes défini sur cet élément soit connu en fonction du temps

$$\exists\, \sigma\,(t) \longrightarrow \exists\, \mathbf{s}\,(t)$$

Le problème consiste à trouver l'évolution, en fonction du temps, du tenseur des déformations pour une condition initiale donnée :

$$\epsilon(t_o) = \epsilon_o$$

L'équation de partition

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$$

permet de ramener le problème à la résolution de l'équation différentielle de visco-plasticité :

$$\frac{d\mathbf{e}_p}{dt} = H(s_{II}, e_{pII})\,\mathbf{s}$$

avec la condition initiale

$$\mathbf{e}_{p(t_o)} = \mathbf{e}_{p_o}$$

D'après le théorème de **Cauchy-Lipschitz** [91], cette équation différentielle aura une solution et une seule, pour la condition initiale indiquée, si les opérateurs $\mathbf{s}$ et H sont continus dans leur domaine de définition et s'ils vérifient une condition de **Lipschitz.**

En effet, si ces conditions sont vérifiées, l'équation différentielle peut se mettre sous la forme classique :

$$\frac{d\mathbf{e}_p}{dt} = \underline{H}^*(\mathbf{e}_p, t)$$

$\underline{H}^*$ étant un opérateur continu et lipschitzien.

Dans la pratique, l'expression de la fonction H est tirée de résultats expérimentaux traduisant des phénomènes continus et il est toujours possible de choisir des expressions qui satisfont aux conditions énoncées.

III,2. Cas particuliers

III,2.1. Elasticité

L'hypothèse de partition :

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$$

permet de développer des lois qui contiennent la théorie de l'élasticité. Une extension immédiate des résultats exposés au paragraphe II,5.1 permet d'affirmer que la loi donnera des solutions voisines des solutions de l'élasticité stricte, tant que la déformation visco-plastique obtenue par l'équation de visco-plasticité sera telle que

$$\frac{e_{pII}}{e_{eII}} < \Delta \quad \text{avec} \quad \Delta \ll 1$$

III,2.2. Plasticité

On a vu au paragraphe I,3.1 que le comportement plastique peut être considéré comme un comportement visco-plastique dans lequel l'influence de la viscosité est négligée.Ceci correspond à des propriétés particulières de la fonction H , par exemple :

$$n_v \gg m_v$$

Malgré certaines difficultés de calcul numérique, la loi s'applique à ces cas pour donner des solutions proches de celles que l'on peut obtenir à l'aide de la loi de **Prandt-Reuss**, mais le passage de l'une à l'autre n'a pu être établi par un raisonnement théorique.

III,2.3. Fluage établi

Dans ce cas, c'est l'effet de l'écrouissage qui est inexistant ou négligé. La fonction H ne dépend pas, ou peu, de $\tilde{\epsilon}_{p\,II}$ et la loi se réduit à la loi d'**Odqvist** [19]

$$d\mathbf{e}_p = H_0(s_{II})\ \mathbf{s}\,dt$$

Dans le cas de la forme analytique utilisée, le fluage établi correspond à :

$$m_v \to \infty$$

III,2.4. Trajet de chargement simple

On sait que le chargement relatif à un corps V est dit simple si, à chaque instant, en tout point M de V, les directions principales du tenseur des contraintes et les rapports de ses composantes restent constants. Le tenseur des contraintes est de la forme :

$$\sigma = A(t)\,\Sigma^*$$

où $A(t)$ est une fonction à valeur scalaire nulle pour $t = 0$ et telle que $\dot{A}(t) \geq 0$ pour $t > 0$
Σ^* est un tenseur constant.

Il s'agit d'un cas extrêmement intéressant puisque, le vecteur contrainte gardant toujours la même direction, on peut démontrer que le vecteur déformation est colinéaire au vecteur contrainte ; la loi de comportement s'exprime alors en fonction des propriétés dans cette seule direction, ce qui revient à dire que l'anisotropie engendrée par la déformation n'intervient pas dans le problème. Une théorie de visco-plasticité isotrope est rigoureuse dans le cas du chargement simple.

III,2.4.1. Intégration de la loi d'élasto-visco-plasticité

Un autre intérêt du cas du chargement simple est qu'il entraîne la possibilité d'intégrer la loi différentielle proposée :

Considérons un corps soumis à un chargement simple, à partir d'un état isotrope de référence défini à l'instant initial $t = 0$. En chaque point

$$\sigma = A(t)\,\Sigma^*$$

ce qui entraîne

$$\mathbf{s} = A_1(t)\,\Sigma \qquad (\Sigma = \text{cte})$$

La forme de la loi proposée (voir paragraphe III,1.2) permet une intégration immédiate des déformations élastiques à partir de l'état de référence :

$$\epsilon_{em} = \frac{1 - 2\nu_{ev}}{E_v}\,\sigma_m$$

$$\mathbf{e}_e = \frac{1+\nu_{ev}}{E_v}\,A_1(t)\,\Sigma = \frac{1+\nu_{ev}}{E_v}\,\mathbf{s}$$

avec la condition initiale introduite.

Considérons l'équation de visco-plasticité :

$$d\mathbf{e}_p = H(s_{II},\ \tilde{\epsilon}_{p\,II})\,\mathbf{s}\,dt$$

H étant une fonction continue monotone croissante, la condition $\dot{A}(t) \geq 0$ pour $t > 0$ entraîne

$$\dot{\epsilon}_{p\,II} > 0$$

d'où

$$\tilde{e}_{p\,II} \equiv e_{p\,II}$$

Effectuons l'opération suivante sur l'équation de visco-plasticité :

$$\left[t_r \left(\dot{\mathbf{e}}_p^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[t_r \left(\left[H \left(s_{II}, e_{p\,II} \right) \mathbf{s} \right]^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[t_r \left(\dot{\mathbf{e}}_p^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} = H \left(s_{II}, e_{p\,II} \right) . s_{II}$$

Dans le cas général, cette équation différentielle ne peut être intégrée simplement puisque :

$$\left[t_r \left(\dot{\mathbf{e}}_p^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \neq \frac{d}{dt} \left(e_{p\,II} \right)$$

Nous allons montrer que, dans le cas du chargement simple, cette inégalité devient une égalité.

L'équation : $$\mathbf{s} = A_1(t)\, \boldsymbol{\Sigma}$$

entraîne d'après l'équation de visco-plasticité

$$d\mathbf{e}_p = A_2(t)\, \boldsymbol{\Sigma}\, dt$$

(les différentes fonctions A indicées sont définies sur le même intervalle).
Une intégration avec $\mathbf{e}_{p(o)} = 0$ donne :

$$\mathbf{e}_p = A_3(t)\, \boldsymbol{\Sigma}$$

avec :

$$A_2 = \frac{dA_3}{dt}$$

$$\begin{aligned} \left[t_r \left(\dot{\mathbf{e}}_p^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} &= \left[t_r \left(\left[A_2(t)\, \boldsymbol{\Sigma} \right]^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} = A_2 \left[t_r \left(\boldsymbol{\Sigma}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{dA_3}{dt} \left[t_r \left(\boldsymbol{\Sigma}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\left[t_r \left(\left[A_3 \boldsymbol{\Sigma} \right]^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\left[t_r \left(\mathbf{e}_p^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

d'où :

$$\left[t_r \left(\left[\frac{d}{dt} \mathbf{e}_p \right]^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{dt} \left(\left[t_r \left(\mathbf{e}_p \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right)$$

L'équation de visco-plasticité se réduit alors à une équation différentielle scalaire

$$\dot{e}_{p\,II} = H \left(s_{II}, e_{p\,II} \right) s_{II}$$

qui possède une solution $e_{p\,II}(t)$ pour une histoire de chargement donnée $s_{II}(t)$. Le tenseur de déformation s'obtient alors par l'intégrale :

$$\mathbf{e}_p = \left[\int_0^t H\left(s_{II}(t),\, e_{p\,II}(t)\right) . A_1(t)\, dt \right] \Sigma$$

avec la condition initiale introduite.

Dans le cas du chargement simple, la loi se résume donc à :

$$\sigma = A(t)\,\Sigma^* \longrightarrow \mathbf{s} = A_1(t)\,\Sigma$$

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$$

$$\epsilon_e = \frac{1 - 2\nu_{ev}}{E_v}\,\sigma_m \mathbf{1} + \frac{1+\nu_{ev}}{E_v}\,\mathbf{s}$$

$$\mathbf{e}_p = \left[\int_0^t H\left(s_{II}(t),\, e_{p\,II}(t)\right) . A_1(t)\, dt \right] \Sigma$$

$e_{p\,II}(t)$ étant la solution de :

$$\dot{e}_{p\,II} = H\left(s_{II}(t),\, e_{p\,II}\right) s_{II}(t)$$

Dans le cas de l'expression analytique trouvée pour H :

$$H\left(s_{II}, e_{p\,II}\right) = K_T^{-n_v} s_{II}^{n_v - 1}\, e_{p\,II}^{-\frac{n_v}{m_v}}$$

l'équation différentielle est à variables séparées et l'intégration donne :

$$e_{p\,II}(t) = \left[\frac{n_v + m_v}{m_v}\, K_T^{-n_v} \int_0^t s_{II}^{n_v}(t)\, dt \right]^{\frac{m_v}{n_v + m_v}}$$

On démontre ainsi, dans le cas du chargement simple, l'existence d'une loi en termes entiers postulée en 1966 [41]. D'autre part, l'existence et l'unicité de la solution $\mathbf{e}_p(t)$ pour l'élément de volume se trouvent ainsi démontrées dans le cas du chargement simple.

III,2.4.2. Théorème d'existence du chargement simple

Dans le cas de la plasticité, **Ilioushine** [92] a démontré un théorème qui permet de relier l'existence du chargement simple à certaines propriétés de la loi de comportement et des forces extérieures imposées :

«Une condition suffisante d'existence du chargement simple sur un corps lors d'un chargement où toutes les forces croissent proportionnellement à un seul paramètre arbitraire est que la loi de comportement de plasticité s'exprime sous forme d'une fonction puissance».

Ceci se traduit, dans la loi de **Hencky-Mises** [47] par exemple, par

$$\epsilon_p = \frac{s_{II}^{m_H - 1}}{K_H}\,\mathbf{s}$$

(m_H et K_H étant des scalaires caractéristiques de la loi d'écrouissage).

On va étendre ce résultat à la visco-plasticité par une démonstration effectuée dans le cas d'un problème de type II (conditions aux limites données uniquement sur les forces).

Soit un corps en équilibre quasi-statique non déformé et non écroui à l'instant initial $t = 0$
Les forces extérieures qui s'exercent sur ce corps sont définies par une densité volumique $\lambda(t)\, F_v\,(M)$ définie en tout point M du volume V du corps considéré, et par une densité surfacique $\lambda(t)\, F_\Sigma\,(M)$ définie en tout point M de la surface Σ du corps.

λ est un scalaire fonction du temps, nul à l'instant initial $t = 0$ et tel que $\dot{\lambda} \geq 0$ pour $t > 0$

Les équations du problème sont les suivantes :

– les équations d'équilibre :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \overline{\lambda F_v} = 0$$

– les conditions aux limites

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n} = \lambda F_\Sigma \qquad \forall M \in \Sigma$$

$\vec{n}$ étant le vecteur normal à Σ en M

– les relations entre les déformations et les déplacements

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}\left[\frac{\delta U}{\delta M} + \overline{\frac{\delta U}{\delta M}}\right]$$

– les relations de la loi de comportement

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_e + \boldsymbol{\epsilon}_p$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_e = \frac{1 - 2\nu_{ev}}{E_v}\,\sigma_m \mathbf{1} + \frac{1+\nu_{ev}}{E_v}\,\mathbf{s}$$

$$\dot{\mathbf{e}}_p = H(\mathbf{s}_{II}, \tilde{\mathbf{e}}_{pII})\,\mathbf{s}$$

Supposons connue la solution du problème à l'instant $t = t^*$ correspondant à $\lambda = \lambda^*$, soit :

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}(M, t^*, \lambda^*)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^* = \boldsymbol{\epsilon}(M, t^*, \lambda^*)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^* = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(M, t^*, \lambda^*)$$

et cherchons des conditions d'existence du chargement simple pour toute valeur du temps. Pour cela, cherchons si une solution du type :

$$\boldsymbol{\sigma}(M,t) = \frac{\lambda(t)}{\lambda^*}\,\boldsymbol{\sigma}^*$$

$$\boldsymbol{\epsilon}(M,t) = \frac{\mu(t)}{\mu^*}\,\boldsymbol{\epsilon}^*$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(M,t) = \frac{\dot{\mu}(t)}{\dot{\mu}^*}\,\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^*$$

peut convenir.

(μ étant un scalaire fonction du temps, $\mu^* = \mu(t = t^*)$, $\dot{\mu}^* = \dot{\mu}(t = t^*)$).

Les équations d'équilibre et les conditions aux limites sont satisfaites par la solution envisagée :

En effet :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^*) + \overline{\lambda^* F_v} = 0 \longrightarrow \operatorname{div}\left(\frac{\lambda}{\lambda^*}\,\boldsymbol{\sigma}^*\right) + \overline{\frac{\lambda}{\lambda^*}\cdot\lambda^* F_v} = 0$$

$$\boldsymbol{\sigma}^*\cdot\vec{n} = \lambda^* F_\Sigma \longrightarrow \frac{\lambda}{\lambda^*}\,\boldsymbol{\sigma}^*\cdot\vec{n} = \frac{\lambda}{\lambda^*}\,\lambda^* F_\Sigma$$

Les relations entre les déformations et les déplacements sont également vérifiées ; le déplacement est de la forme :

$$U(M,t) = \frac{\mu(t)}{\mu^*}\,U^*$$

avec

$$U^* = U(M, t^*, \lambda^*)$$

Cherchons maintenant les propriétés imposées à la loi de comportement par cette solution.

Dans le domaine visco-plastique, la relation

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{\mu(t)}{\mu^*}\,\boldsymbol{\epsilon}^*$$

ou

$$\boldsymbol{\epsilon}_e + \boldsymbol{\epsilon}_p = \frac{\mu(t)}{\mu^*}\,\boldsymbol{\epsilon}_e^* + \frac{\mu(t)}{\mu^*}\,\boldsymbol{\epsilon}_p^*$$

ne peut être satisfaite que si la déformation élastique est nulle (ou négligeable) car $\boldsymbol{\epsilon}_e$ et $\boldsymbol{\epsilon}_p$ ont des expressions différentes imposées par les relations de comportements élastique et visco-plastique.

Cette hypothèse étant vérifiée ($\boldsymbol{\epsilon}_e \equiv 0$), on écrira :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{e}_p = \frac{\mu(t)}{\mu^*}\,\mathbf{e}_p^*$$

et

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\mathbf{e}}_p = \frac{\dot{\mu}(t)}{\dot{\mu}^*}\,\dot{\mathbf{e}}_p^*$$

ce qui entraîne

$$e_{p\,II} = \frac{\mu(t)}{\mu^*}\,e_{p\,II}^*$$

De même :

$$\mathbf{s} = \frac{\lambda(t)}{\lambda^*}\,\mathbf{s}^*$$

$$s_{II} = \frac{\lambda(t)}{\lambda^*}\,s_{II}^*$$

D'où l'écriture de la relation de visco-plasticité

$$\dot{\mathbf{e}}_p = \frac{\dot{\mu}(t)}{\dot{\mu}^*}\,\dot{\mathbf{e}}_p^* = H\left(\frac{\lambda(t)}{\lambda^*}\,s_{II}^*\,,\,\frac{\mu(t)}{\mu^*}\,e_{p\,II}^*\right)\frac{\lambda(t)}{\lambda^*}\,\mathbf{s}^*$$

avec

$$\dot{\mathbf{e}}_p^* = H\left(s_{II}^*\,,\,e_{p\,II}^*\right)\mathbf{s}^*$$

Si la fonction H est un produit de deux fonctions puissance, cette relation se réduit à une équation différentielle en μ qui, avec la condition initiale introduite possède une solution $\mu(t)$, ce qui prouve que la solution envisagée est admissible.

Examinons, à titre d'exemple, la forme analytique trouvée pour la fonction H :

$$H(s_{II}, e_{pII}) = K_T^{-n_v} s_{II}^{n_v-1} e_{pII}^{-\frac{n_v}{m_v}}$$

La relation de visco-plasticité s'exprime par :

$$\dot{\mathbf{e}}_p = \frac{\dot{\mu}}{\dot{\mu}^*} \dot{\mathbf{e}}_p^* = K_T^{-n_v} \left[\frac{\lambda}{\lambda^*} s_{II}^*\right]^{n_v-1} \left[\frac{\mu}{\mu^*} e_{pII}^*\right]^{-\frac{n_v}{m_v}} \frac{\lambda}{\lambda^*} \mathbf{s}^*$$

$$= K_T^{-n_v} s_{II}^{*n_v-1} e_{pII}^{*-\frac{n_v}{m_v}} \mathbf{s}^* \left[\frac{\lambda}{\lambda^*}\right]^{n_v} \left[\frac{\mu}{\mu^*}\right]^{-\frac{n_v}{m_v}}$$

$\dot{\mathbf{e}}_p^*$ étant la solution pour $t = t^*$ il reste :

$$\frac{\dot{\mu}}{\dot{\mu}^*} = \left[\frac{\lambda}{\lambda^*}\right]^{n_v} \left[\frac{\mu}{\mu^*}\right]^{-\frac{n_v}{m_v}}$$

équation différentielle à variables séparées qui, avec la conditions initiale;

$$\lambda(o) = 0 \longrightarrow \mu(o) = 0$$

donne la solution

$$\mu(t) = \left[\frac{m_v + n_v}{m_v} \dot{\mu}^* \mu^{*\frac{n_v}{m_v}} \lambda^{*-n_v} \int_o^t \lambda_{(t)}^{n_v} dt\right]^{\frac{m_v}{m_v+n_v}}$$

En résumé, nous avons démontré le théorème suivant :

Des conditions suffisantes d'existence du chargement simple pour une structure réalisée en un matériau élasto-visco-plastique dans un comportement quasi statique sont les suivantes :

- Toutes les forces extérieures croissent proportionnellement à un seul paramètre
- L'état initial est l'état non déformé et non écroui
- Les conditions aux limites sont exprimées en termes de forces
- Les déformations élastiques sont négligées devant les déformations visco-plastiques
- La relation de visco-plasticité de la loi de comportement est de la forme :

$$\dot{\mathbf{e}}_p = H(s_{II}, e_{pII})\, \mathbf{s}$$

H étant un produit de deux fonctions puissance.

Précisons bien qu'il ne s'agit que de conditions suffisantes.

III,3. Méthode de calcul associée

La loi de comportement a été élaborée en fonction d'une utilisation dans un calcul de structure par maillage (dans l'espace) et pas à pas (dans le temps). En général, la très grande non linéarité des équations pose des problèmes d'analyse numérique dans le calcul pas à pas qui peut ne pas converger vers la solution. Ils peuvent être résolus :

- soit par un calcul du pas optimal (méthode **H. Berger**) [82] dans lequel chaque accroissement de temps est calculé de manière que les termes négligés dans certains développements en série de **Taylor** ne représentent qu'une fraction des termes principaux conservés, inférieure à une valeur donnée qui définit la précision.

– soit par l'introduction d'une itération qui permet de s'approcher à chaque pas de la solution exacte de l'équation de visco-plasticité

– soit par une combinaison des deux qui semble être la méthode qui minimise les temps de calcul.

Si les conditions initiales du calcul sont un chargement nul sur une structure non déformée, réalisée en un matériau non écroui, le premier pas ne peut être résolu par le même processus que les autres puisque :

$$H\ (\ s_{II} = 0\ ,\ e_{pII} = 0\ ) = 0$$

Bien que les déformations élastiques ne puissent être négligées devant les déformations visco-plastiques, on pourra supposer que, pendant cet intervalle de temps considéré comme aussi court qu'on le voudra, le chargement est simple et se servir des équations intégrées du paragraphe III,2.4.1.

La complexité des calculs de résistance des structures ne permet pas d'envisager une méthode de calcul générale. Pour chaque type de structure (poutres, plaques, coques), des hypothèses cinématiques (**Bernouilli**, **Kirchoff Love**) permettent de simplifier le problème en donnant des schémas de calcul spécifiques. On trouvera dans les travaux de **R. Valid** [93-94] des méthodes de calculs de coques et de poutres par maillage et pas à pas, compatibles avec la loi de comportement proposée. Ces méthodes, qui engendrent des volumes de calculs importants, ne trouvent leur pleine application que si elles sont mises en oeuvre sur de puissants ordinateurs. Un exemple simple est donné dans la suite.

III,4. Application au calcul d'un cylindre soumis à un chargement complexe variable

Le but de cette application faite en 1970 [95] est de vérifier la validité de la loi de comportement dans un cas suffisamment complexe, du point de vue sollicitation au niveau de l'élément de volume, pour avoir une bonne description des possibilités de la loi, et suffisamment simple du point de vue analyse de structure pour que la méthode de calcul n'apporte pas d'approximation pouvant gêner le jugement de la validité de la loi de comportement.

L'étude d'un cylindre creux, droit, à section circulaire constitue un cas particulièrement simple à analyser si l'on peut considérer sa longueur comme infinie et son épaisseur comme faible devant son rayon. La possibilité d'envisager des sollicitations simultanées de traction ou compression, torsion et pression interne, variables dans le temps d'une manière indépendante, permet d'explorer une partie importante du domaine de validité souhaité de la loi. Cette vérification constitue une généralisation de vérifications très intéressantes effectuées au «National Engineering Laboratory» à propos de lois tridimensionnelles particularisées différemment pour chaque type de sollicitation (fluage primaire ou secondaire ou tertiaire en chargement simple ou non, relaxation...) [96].

III,4.1. Mise en équation du problème

Soit un cylindre creux peu épais, droit, à section circulaire (fig. III,1) défini dans un état, éventuellement déformé à chaque instant, par :

– son épaisseur : $h(t)$

– sa longueur : $l(t)$

– son rayon moyen : $r(t)$

Il est sollicité en fonction du temps par :

– une force axiale (traction ou compression) : $F(t)$

– un couple de torsion dont le vecteur est coaxial à l'axe du cylindre : $C(t)$

– une pression interne dont la valeur par rapport à la pression externe est : $p(t)$

Les conditions aux limites considérées sont constituées par des extrémités libres.

Dans l'expérience, le cylindre doit posséder des fonds pour supporter la pression ; on supposera qu'il est suffisamment long pour que les perturbations apportées sur le champ de contraintes et le champ de déformations soient faibles.

Les conditions initiales sont définies par :

$$t = 0 \longrightarrow \begin{cases} h_{(o)} = h_o \\ l_{(o)} = l_o \\ r_{(o)} = r_o \end{cases} \qquad t = 0 \longrightarrow \begin{cases} F_{(o)} = 0 \\ c_{(o)} = 0 \\ p_{(o)} = 0 \end{cases}$$

Les données du problème sont les programmes de charges :

$$\left.\begin{matrix} F(t) \\ C(t) \\ P(t) \end{matrix}\right\} \text{définis } \forall\, t > 0$$

et le programme de température $T(t)$ uniforme dans l'espace et éventuellement variable dans le temps.

Le but du calcul est de trouver l'évolution, dans le temps, des déformées du cylindre :

- la rotation $\theta(t)$ exprimée par $\frac{r_o}{2 l_o} \Delta\theta(t)$
- l'allongement $l(t)$ exprimé par $\frac{\Delta l(t)}{l_o}$
- le gonflement $r(t)$ exprimé par $\frac{\Delta r(t)}{r_o}$

$\Delta\theta$, Δl , Δr exprimant les variations par rapport aux grandeurs initiales.

Le matériau constitutif du cylindre est supposé obéir à la loi de comportement élasto-visco-plastique définie au paragraphe III,1.2.

$$d\boldsymbol{\epsilon} = d\boldsymbol{\epsilon}_e + d\boldsymbol{\epsilon}_p$$

$$d\boldsymbol{\epsilon}_e = \frac{1 - 2\nu_{ev}}{E_v} d\sigma_m \,.\, \mathbf{1} + \frac{1+2\nu_{ex}}{E_v} d\mathbf{s}$$

$$d\boldsymbol{\epsilon}_p = d\boldsymbol{\theta}_p = K_T^{-n_v} s_{II}^{n_v - 1} \tilde{e}_{pII}^{-\frac{n_v}{m_v}} \mathbf{s}$$

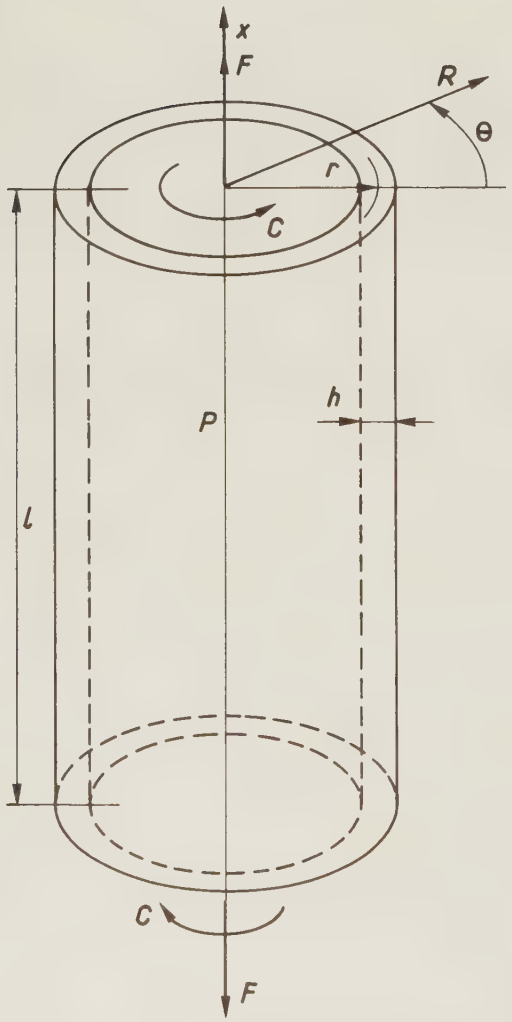


Fig. III,1 - Définition du cylindre

Les grandeurs qui doivent être exprimées dans une base seront écrites dans le système d'axes cylindriques $\begin{pmatrix} \theta \\ x \\ R \end{pmatrix}$ fixe par rapport à la base du cylindre (fig. III,1).

La symétrie de révolution du problème, les sollicitations et les conditions aux limites considérées font que l'ensemble du cylindre est dans un état de sollicitation uniforme et l'on pourra se borner à l'étude d'une tranche normale à l'axe qui sera considérée comme une maille.

Le problème géométrique étant particulièrement simple, nous appliquons les résultats de la résistance des matériaux classique avec certaines améliorations pour éviter les contradictions classiques dans les problèmes de coques.

III,4.1.1. Contraintes

Le champ de contrainte est déduit simplement de l'équilibre statique au sens de la résistance des matériaux, ce qui revient à écrire les conditions aux limites.

L'hypothèse du cylindre mince $\frac{r}{h} >> 1$ permet habituellement de négliger la contrainte normale suivant l'axe R dans l'épaisseur.

Comme elle a pour valeur

$$\sigma_{33} = -p \quad \text{pour} \quad R = r - \frac{h}{2}$$
$$\sigma_{33} = 0 \quad \text{pour} \quad R = r + \frac{h}{2}$$

nous prendrons à titre d'amélioration $\sigma_{33} = -\frac{p}{2}$

sachant qu'il s'agit encore d'une approximation grossière que l'on peut malgré tout justifier par linéarisation d'une expression trouvée par **R.W. Bailey** dans le cas du fluage secondaire [97]

$$\sigma_{33} = -p \frac{\left[1 + \frac{h}{2R}\right]^{2/n_N} - 1}{\left[\frac{1 + \frac{h}{2R}}{1 - \frac{h}{2R}}\right]^{2/n_N} - 1}$$

n_N étant le coefficient de **Norton**.

On trouvera dans les références [98-99-100] des moyens d'introduire la variation de contrainte dans l'épaisseur pour les problèmes de fluage de cylindre à paroi épaisse.

A chaque instant, la matrice des contraintes dans le système d'axes choisi est de la forme :

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{pr}{h} & \frac{c}{2\pi r^2 h} & 0 \\ \frac{c}{2\pi r^2 h} & \frac{pr}{2h} + \frac{F}{2\pi rh} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p}{2} \end{bmatrix}$$

Le champ de contrainte étant uniforme, les forces de volumes étant nulles, les équations d'équilibre sont identiquement vérifiées.

On déduit facilement :

– la contrainte moyenne

$$\sigma_m = \frac{pr}{2h} + \frac{F}{6\pi rh} - \frac{p}{6}$$

– la matrice représentative du déviateur des contraintes

$$\underline{s} = \begin{bmatrix} \frac{pr}{2h} - \frac{F}{6\pi rh} + \frac{p}{6} & \frac{c}{2\pi r^2 h} & 0 \\ \frac{c}{2\pi r^2 h} & \frac{F}{3\pi rh} + \frac{p}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\left[\frac{pr}{2h} + \frac{F}{6\pi rh} + \frac{p}{3}\right] \end{bmatrix}$$

– le second invariant de $\mathbf{S}$

$$S_{II} = \left[\frac{p^2 r^2}{2h^2} + \frac{F^2}{6\pi^2 r^2 h^2} + \frac{c^2}{2\pi r^4 h^2} + \frac{p^2}{6} + \frac{p^2 r}{2h} + \frac{pF}{6\pi r h} \right]^{\frac{1}{2}}$$

III,4.1.2. Déformations

La méthode pas à pas dans le temps utilisée permet de s'affranchir de l'hypothèse des petites déformations et petits déplacements, pour les déformations et déplacements totaux, dans la mesure où elle est vérifiée pour leurs accroissements à chaque pas. D'autre part, la symétrie de révolution du problème permet de résoudre les équations dans une base fixe invariable à chaque pas.

Le champ des accroissements de déformations est déterminé à partir d'un champ des accroissements de déplacements δU écrit a priori et compatible avec les données du problème :

$$\delta U_\theta = \frac{\delta\theta}{l} rx$$

$$\delta U_x = \frac{\delta l}{l} x$$

$\delta\theta$ et δl étant l'accroissement de rotation et l'accroissement de longueur pour un pas

$$\delta U_R = f_U(R)$$

Il n'est pas possible d'exprimer la fonction f_U par des considérations immédiates. Pour être compatible avec la loi de comportement adaptée, le champ δU doit être tel que

$$t_r(\delta\epsilon_p) = 0$$

ce qui détermine la fonction f_u

Les relations entre les déformations et les déplacements écrites en coordonnées cylindriques conduisent à la matrice des accroissements de déformations

$$\underline{\delta\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{f_u(R)}{R} & \delta\theta \frac{r}{2l} & 0 \\ \delta\theta \frac{r}{2l} & \frac{\delta l}{l} & 0 \\ 0 & 0 & f'_u(R) \end{bmatrix}$$

Ecrivons

$$t_r(\delta\epsilon_p) = 0$$

$$t_r(\delta\epsilon_p) = t_r(\delta\epsilon - \delta\epsilon_e) = t_r(\delta\epsilon) - t_r(\delta\epsilon_e)$$

$$= t_r(\delta\epsilon) - 3\delta\epsilon_{em}$$

d'où

$$\frac{f_u(R)}{R} + f'_u(R) + \frac{\delta l}{l} - 3\delta\epsilon_{em} = 0$$

Dans le cas où la sollicitation est une pression seule, si l'on néglige la déformation élastique, cette équation se réduit à

$$\frac{f_u(R)}{R} + f'_u(R) = 0$$

qui est un résultat trouvé par **N.J. Hoff** [35].

La solution de l'équation différentielle complète avec la condition à la limite :

$$R = r \longrightarrow f_u(R) = \delta U_R = \delta r$$

est la suivante :

$$f_u(R) = \frac{r}{R}\,\delta r + \frac{3\,\delta\epsilon_{em} - \frac{\delta l}{l}}{2}\left[R - \frac{r^2}{R}\right]$$

et :

$$f'_u(R) = -\frac{r}{R^2}\,\delta r + \frac{3\,\delta\epsilon_{em} - \frac{\delta l}{l}}{2}\left[1 + \frac{r^2}{R^2}\right]$$

L'épaisseur du cylindre étant faible, $\frac{h}{R} \ll 1$, tous les points M du cylindre sont tels que :

$$R_{(M)} \# r$$

et l'on fera l'approximation suivante :

$$f_u(R) \# \delta r$$

$$f'_u(R) \# -\frac{\delta r}{r} - \frac{\delta l}{l} + 3\,\delta\epsilon_{em.} = \frac{\delta h.}{h.}$$

La matrice des accroissements de déformation s'écrit alors :

$$\underline{\delta\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\delta r}{r} & \delta\theta\,\frac{r}{2l} & \text{◯} \\ \delta\theta\,\frac{r}{2l} & \frac{\delta l}{l} & \text{◯} \\ \text{◯} & \text{◯} & -\frac{\delta r}{r} - \frac{\delta l}{l} + 3\,\delta\epsilon_{em} \end{bmatrix}$$

Les variations de température considérées étant faibles, les variations de dilatation sont négligées.

III,4.2. Méthode de calcul

Le calcul étant effectué pas à pas, on va développer les équations nécessaires pour passer du temps t_i au temps t_{i+1}. Le problème du premier pas fera l'objet d'un développement particulier.

III,4.2.1. Passage du pas i au pas $i+1$

La méthode est schématisée sur la figure III,2.

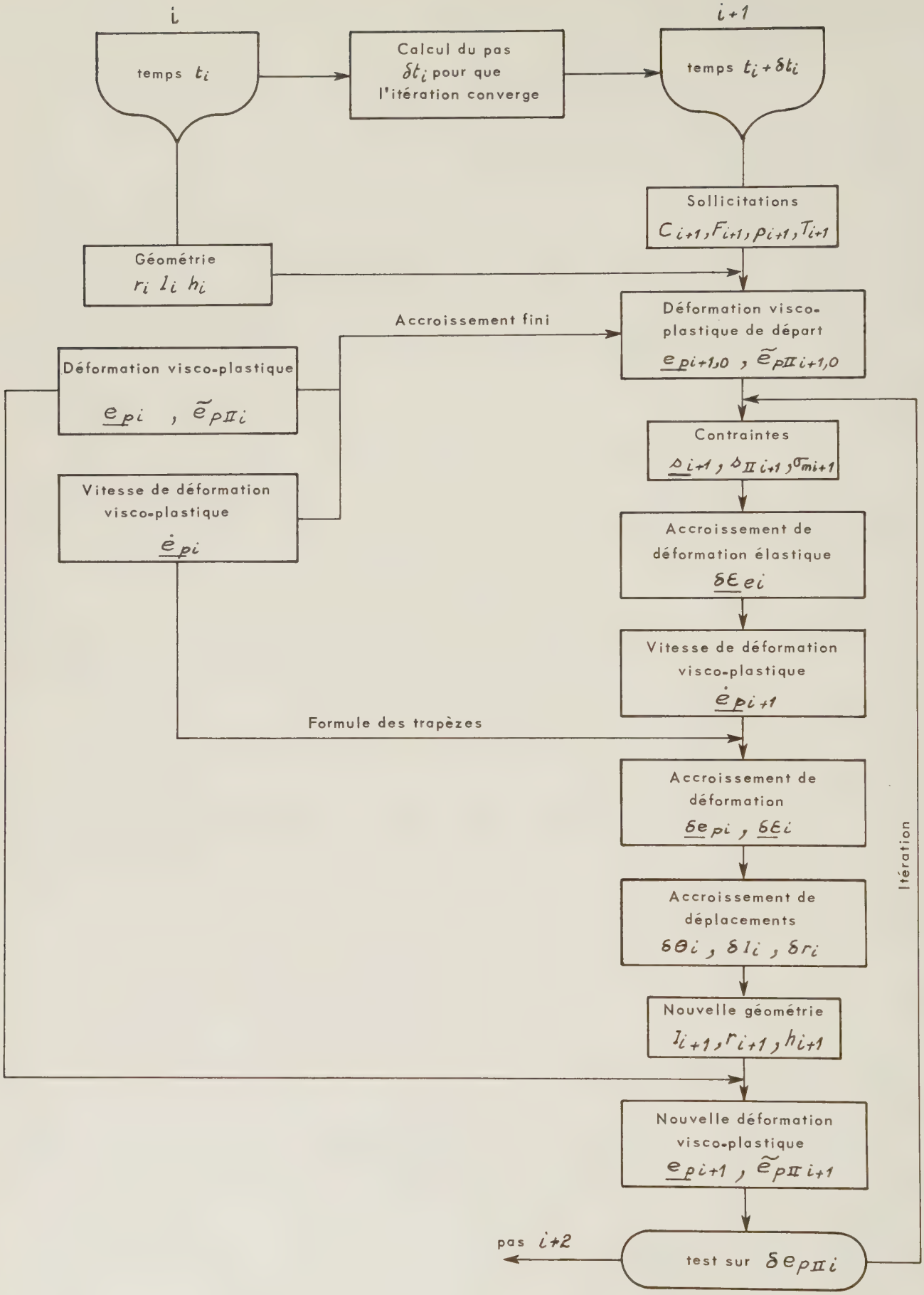


Fig. III,2 - Organigramme général de calcul

Les données au temps t_i sont :

- la géométrie du cylindre $\begin{cases} r_i \\ l_i \\ h_i \end{cases}$
- les contraintes
- les déformations
- les déplacements

Les données au temps t_{i+1} sont :

- le couple appliqué C_{i+1}
- la force axiale F_{i+1}
- la pression interne P_{i+1}
- la température T_{i+1}

Pour commencer le calcul il faut disposer d'une valeur approchée de la déformation visco-plastique au temps t_{i+1} : $\tilde{e}_{p\text{II}\,i+1,0}$. Elle est obtenue simplement à partir de $\underline{e}_{p\,i+1,0}$ calculé par la formule des accroissements finis :

$$\underline{e}_{p\,i+1,0} = \underline{e}_{pi} + \dot{\underline{e}}_{pi}\,\delta t_i$$

avec

$$\delta t_i = t_{i+1} - t_i$$

$$\delta\tilde{e}_{p\text{II}\,i,0} = \left| \left[tr\left([\underline{e}_{p\,i+1,0}]^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} - \left[tr\left([\underline{e}_{p\,i}]^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right|$$

et

$$\tilde{e}_{p\text{II}\,i+1,0} = \tilde{e}_{p\text{II}\,i} + \delta\tilde{e}_{p\text{II}\,i,0}$$

Une première approximation des contraintes peut être obtenue par les formules établies au paragraphe III,4.1.1 en fonction des forces extérieures au temps, t_{i+1}, et de la géométrie du cylindre, au temps t_i :

$$\underline{s}_{i+1} = \underline{s}\,(C_{i+1}, F_{i+1}, p_{i+1}, r_i, h_i)$$

$$s_{\text{II}\,i+1} = s_{\text{II}}(C_{i+1}, F_{i+1}, p_{i+1}, r_i, h_i)$$

$$\sigma_{m\,i+1} = \sigma_m(F_{i+1}, p_{i+1}, r_i, h_i)$$

Les accroissements de déformation s'en déduisent immédiatement par les équations de la loi de comportement :

$$\underline{\delta\epsilon}_{ei} = \frac{1-2\nu_{ev}}{E_v}\,\delta\sigma_{mi}\underline{1} + \frac{1+\nu_{ev}}{E_v}\,\underline{\delta s}_i$$

avec

$$\delta\sigma_{mi} = \sigma_{mi+1} - \sigma_{mi}$$

$$\underline{\delta s}_i = \underline{s}_{i+1} - \underline{s}_i$$

La vitesse de déformation visco-plastique correspondante est obtenue par l'équation de visco-plasticité de la loi de comportement :

$$\underline{e}_{p\,i+1} = K_T^{-n_v}\; s_{\text{II}\,i+1}^{n_v-1}\; \tilde{e}_{p\text{II}\,i+1}^{-\frac{n_v}{m_v}}\; \underline{s}_{i+1}$$

On peut maintenant obtenir l'accroissement de déformation visco-plastique par la formule des trapèzes à partir de $\underline{\dot{e}_{pi}}$ et $\underline{\dot{e}_{pi+1}}$

$$\underline{\delta e_{pi}} = \left[\underline{\dot{e}_{pi}} + \underline{\dot{e}_{pi+1}} \right] \frac{\delta t_i}{2}$$

Cette méthode revient à calculer $\underline{\delta e_{pi}}$ par la série de **Taylor** limitée au deuxième terme (ce qui serait impossible à faire directement à cause du manque de précision dans le calcul de la dérivée seconde de $\underline{e_p}$).

En effet :

$$\underline{\delta e_{pi}} = \left[\underline{\dot{e}_{pi}} + \left[\underline{\dot{e}_{pi}} + \underline{\ddot{e}_{pi}}\, \delta t_i + \dots \right] \right] \frac{\delta t_i}{2}$$

$$= \underline{\dot{e}_{pi}}\, \delta t_i + \underline{\ddot{e}_{pi}} \frac{\delta t_i^2}{2} + \dots$$

D'où l'accroissement de déformation totale :

$$\underline{\delta \epsilon_i} = \underline{\delta \epsilon_{ei}} + \underline{\delta e_{pi}}$$

et les accroissements de déplacement par la matrice $\underline{\delta \epsilon}$ écrite au paragraphe III,4.1.2 : $\delta\theta_i$, δl_i, δr_i,
On en déduit les déplacements normalisés totaux :

$$\frac{r_o}{2 l_o} \Delta\theta_{i+1} = \frac{r_o}{2 l_o} \Delta\theta_i + \frac{r_o}{2 l_o} \delta\theta_i$$

$$\frac{\Delta l_{i+1}}{l_o} = \frac{\Delta l_i}{l_o} + \frac{\delta l_i}{l_o}$$

$$\frac{\Delta r_{i+1}}{r_o} = \frac{\Delta r_i}{r_o} + \frac{\delta r_i}{r_o}$$

On a ainsi tous les éléments d'un processus itératif puisqu'il est possible de calculer :

- la nouvelle géométrie du cylindre

$$l_{i+1} = l_i + \delta l_i$$

$$r_{i+1} = r_i + \delta r_i$$

$$h_{i+1} = h_i + \delta h_i$$

avec

$$\delta h_i = h_i \left[3\, \delta \epsilon_{emi} - \frac{\delta r_i}{r_i} - \frac{\delta l_i}{l_i} \right]$$

- la nouvelle déformation visco-plastique par

$$\tilde{e}_{p_{II}\, i+1} = \tilde{e}_{p_{II}\, i} + \delta \tilde{e}_{p_{II}\, i}$$

avec

$$\delta \tilde{e}_{p_{II}\, i} = \left| \left[tr\left([e_{pi+1}]^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} - \left[tr\left([e_{pi}]^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right|$$

et

$$\underline{e_{p\,i+1}} = \underline{e_{p\,i}} + \underline{\delta e_{p\,i}}$$

Ceci permet de calculer les contraintes à l'instant t_{i+1} en fonction de la nouvelle géométrie et de déterminer la vitesse de déformation visco-plastique en fonction de $\tilde{e}_{p\,II\,i+1}$, plus proche de la valeur exacte qu'avec $\tilde{e}_{p\,II\,i+1,0}$ si l'on est dans le domaine de convergence de l'itération.

L'itération est poursuivie jusqu'à l'obtention d'une certaine précision définie par le scalaire η_1 sur le paramètre scalaire le plus sensible :

$$\delta e_{p\,II\,i} = \left[tr\left(\underline{\delta e_{p\,i}}^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\delta e_{p\,II\,i,\,j+1} - \delta e_{p\,II\,i,\,j}}{\delta e_{p\,II\,i,\,j}} \leq \eta_1$$

j étant l'indice du pas d'itération.

III,4.2.2. Convergence de l'itération

Il n'a pas été possible de démontrer la convergence de l'itération dans le cas général, néanmoins une condition suffisante de convergence peut être établie dans le cas du chargement simple.

Les formules qui définissent l'itération au temps t_{i+1} dans ce cas sont :

$$e_{p\,II\,i+1,\,j+1} = e_{p\,II\,i} + \left[\dot{e}_{p\,II\,i} + \dot{e}_{p\,II\,i+1,\,j+1}\right] \frac{\delta t_i}{2}$$

$$\dot{e}_{p\,II\,i+1,\,j+1} = K_T^{-n_v} s_{II\,i+1,\,j}^{n_v} e_{p\,II\,i+1,\,j}^{-\frac{n_v}{m_v}}$$

La fonction caractéristique de l'itération

$$X = F(X)$$

s'obtient aisément en portant $\dot{e}_{p\,II\,i+1,\,j+1}$ dans l'expression de $e_{p\,II\,i+1,\,j+1}$

$$e_{p\,II\,i+1,\,j+1} = e_{p\,II\,i} + \dot{e}_{p\,II\,i} \frac{\delta t_i}{2} + K_T^{-n_v} s_{II\,i+1,\,j}^{n_v} e_{p\,II\,i+1,\,j}^{-\frac{n_v}{m_v}} \frac{\delta t_i}{2}$$

d'où

$$F(X) = e_{p\,II\,i} + \dot{e}_{p\,II\,i} \frac{\delta t_i}{2} + K_T^{-n_v} s_{II\,i+1,\,j}^{n_v} X^{-\frac{n_v}{m_v}} \frac{\delta t_i}{2}$$

en négligeant la variation de s_{II} au cours du pas d'itération.

Pour que l'itération converge, il faut et il suffit que la fonction F soit contractante c'est-à-dire que :

$$\left|F'(X)\right| < 1$$

$$F'(X) = -K_T^{-n_v} s_{II\,i+1,\,j}^{n_v} \frac{n_v}{m_v} X^{-\frac{n_v+m_v}{m_v}} \frac{\delta t_i}{2}$$

avec

$$X = e_{p\,II\,i+1}$$

Pour que l' itération converge, il faut et il suffit que :

$$\delta t_i < \left| 2 \frac{m_v}{n_v} K_T^{n_v} s_{\Pi i+1,j}^{-n_v} e_{p\Pi i+1}^{\frac{n_v+m_v}{m_v}} \right|$$

que l'on confondra avec

$$\delta t_i < \left| 2 \frac{m_v}{n_v} K_T^{n_v} s_{\Pi i}^{-n_v} e_{p\Pi i}^{\frac{n_v+m_v}{m_v}} \right|$$

ou

$$\delta t_i < \left| 2 \frac{m_v}{n_v} \frac{e_{p\Pi i}}{\dot{e}_{p\Pi i}} \right|$$

ce qui permet de calculer le pas δt_i.

Par extension, justifiée seulement par l' expérience des calculs, on appliquera ce critère au cas du chargement quelconque.

Ayant calculé δt_i pour que l' itération converge, il faut s'assurer qu'elle converge bien vers la solution du problème, c'est-à-dire que les approximations du calcul sont justifiées.

Le calcul pas à pas sans itération impose le calcul de $\underline{e}_{p\,i+1}$ par un développement limité au premier ordre

$$\underline{e}_{p\,i+1} = \underline{e}_{pi} + \underline{\dot{e}}_{pi}\, \delta t_i$$

L'itération permet de calculer ce terme par un développement limité au deuxième ordre puisque nous avons vu au paragraphe III,4.2.1 que :

$$\underline{e}_{p\,i+1} = \underline{e}_{pi} + \left[\underline{\dot{e}}_{pi} + \underline{\dot{e}}_{p\,i+1} \right] \frac{\delta t_i}{2}$$

est équivalent à :

$$\underline{e}_{p\,i+1} = \underline{e}_{pi} + \underline{\dot{e}}_{pi}\, \delta t_i + \underline{\ddot{e}}_{pi} \frac{\delta t_i^2}{2}$$

Nous considérerons cette approximation comme justifiée si le terme du troisième ordre est inférieur à une fraction η_2 du terme du deuxième ordre, η_2 fixant la précision :

$$\left| \frac{\dddot{e}_{pi} \frac{\delta t_i^3}{6}}{\ddot{e}_{pi} \frac{\delta t_i^2}{2}} \right| \leq \eta_2$$

Il s'agit d'un critère grossier, mais suffisant compte tenu de l'itération. Dans le cas du chargement simple, calculons δt_i pour que cette condition soit vérifiée :

$$\dot{e}_{p\Pi i} = K_T^{-n_v} s_{\Pi i}^{n} e_{p\Pi i}^{-\frac{n_v}{m_v}}$$

$$\ddot{e}_{p\Pi i} = -\frac{n_v}{m_v} \frac{\dot{e}_{p\Pi i}^2}{e_{p\Pi i}} + n_v \frac{\dot{e}_{p\Pi i}\, \dot{s}_{\Pi i}}{s_{\Pi i}}$$

$$\dddot{e}_{p\Pi i} = \frac{n_v}{m_v} \frac{\dot{e}_{p\Pi i}^3}{e_{p\Pi i}^2} - 2 \frac{n_v}{m_v} \frac{\dot{e}_{p\Pi i}\, \ddot{e}_{p\Pi i}}{e_{p\Pi i}} - n_v \frac{\dot{e}_{p\Pi i} \dot{s}_{\Pi i}^2}{s_{\Pi i}^2} + n_v \frac{\ddot{e}_{p\Pi i} \dot{s}_{\Pi i}}{s_{\Pi i}} + n_v \frac{\dot{e}_{p\Pi i} \ddot{s}_{\Pi i}}{s_{\Pi i}}$$

d'où

$$\delta t_i \leq 3\,\eta_2 \left| \left[n_v \frac{\dot{s}_{II\,i}}{s_{II\,i}} \left[1 + \frac{\dot{e}_{p\,II\,i}}{\ddot{e}_{p\,II\,i}} \left[\frac{\dot{e}_{p\,II\,i}}{e_{p\,II\,i}} + \frac{\ddot{s}_{II\,i}}{\dot{s}_{II\,i}} - \frac{\dot{s}_{II\,i}}{s_{II\,i}} \right] \right] - \frac{\dot{e}_{p\,II\,i}}{e_{p\,II\,i}} \left[1 + 2\,\frac{n_v}{m_v} \right] \right]^{-1} \right|$$

Là encore, par extension, ce critère sera appliqué au cas du chargement quelconque.

Finalement le pas δt_i sera calculé par :

$$\delta t_i = \mathrm{Min}\left(\left| 2\,\frac{m_v}{n_v}\,\frac{\tilde{e}_{p\,II\,i}}{\dot{e}_{p\,II\,i}} \right| , \left| 3\,\eta_2 \left[n_v \frac{\dot{s}_{II\,i}}{s_{II\,i}} \left[1 + \frac{\dot{e}_{p\,II\,i}}{\ddot{e}_{p\,II\,i}} \left[\frac{\dot{e}_{p\,II\,i}}{\tilde{e}_{p\,II\,i}} + \frac{\ddot{s}_{II\,i}}{\dot{s}_{II\,i}} - \frac{\dot{s}_{II\,i}}{s_{II\,i}} \right] \right] - \frac{\dot{e}_{p\,II\,i}}{\tilde{e}_{p\,II\,i}} \left[1 + 2\,\frac{n_v}{m_v} \right] \right]^{-1} \right| \right)$$

Dans cette expression, les différentes quantités seront calculées par :

$$\dot{e}_{p\,II\,i} = K_T^{-n_v}\, s_{II\,i}^{n_v}\, \tilde{e}_{p\,II\,i}^{-\frac{n_v}{m_v}}$$

$$\ddot{e}_{p\,II\,i} = -\frac{n_v}{m_v}\,\frac{\dot{e}^2_{p\,II\,i}}{\tilde{e}_{p\,II\,i}} + n_v\,\frac{\dot{e}_{p\,II\,i}\,\dot{s}_{II\,i}}{s_{II\,i}}$$

$$\dot{s}_{II\,i} = \frac{s_{II\,i} - s_{II\,i-1}}{\delta t_{i-1}}$$

$$\ddot{s}_{II\,i} = \frac{\dot{s}_{II\,i} - \dot{s}_{II\,i-1}}{\delta t_{i-1}}$$

III,4.2.3. Calcul du premier pas

Comme il a été dit au paragraphe III,3, il est supposé qu'entre les instants $t = 0$ et $t = t_1$, le chargement est simple.

Par souci de simplification, les efforts extérieurs appliqués sont définis par des relations linéaires en fonction du temps

$$0 < t < t_1 \longrightarrow \begin{cases} C_{(t)} = \dfrac{C_1}{t_1}\, t \\ F_{(t)} = \dfrac{F_1}{t_1}\, t \\ p_{(t)} = \dfrac{p_1}{t_1}\, t \end{cases}$$

avec

$$C_{(t_1)} = C_1 \quad , \quad F_{(t_1)} = F_1 \quad , \quad p_{(t_1)} = p_1$$

t_1 est suffisamment petit pour que l'hypothèse du chargement simple puisse être appliquée dans un cas de chargement quelconque et suffisamment grand pour que les composantes de $e_{p\,(t_1)}$ soient numériquement significatives.

On peut alors appliquer la loi intégrée établie au paragraphe III,2.4.1 :

$$\underline{S} = A_1(t)\,\underline{\Sigma}$$

$$A_1(t) = \frac{t}{t_1}$$

$$\underline{\Sigma} = \begin{bmatrix} \frac{p_1 r_0}{2h_0} - \frac{F_1}{6\pi r_0 h_0} + \frac{p_1}{6} & \frac{c_1}{2\pi r_0^2 h_0} & 0 \\ \frac{c_1}{2\pi r_0^2 h_0} & \frac{F_1}{3\pi r_0 h_0} + \frac{p_1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \left[-\frac{p_1 r_0}{2h_0} + \frac{F_1}{6\pi r_0 h_0} + \frac{p_1}{3} \right] \end{bmatrix}$$

$$\sigma_m(t_1) = \left[\frac{p_1 r_0}{2h_0} + \frac{F_1}{6\pi r_0 h_0} + \frac{p_1}{6} \right]$$

$$\underline{S}(t_1) = \underline{\Sigma}$$

La déformation élastique vaut :

$$\underline{\epsilon_e}(t_1) = \frac{1-2\nu_{ev}}{E_v}\,\sigma_m(t_1)\,\underline{1} + \frac{1+\nu_{ev}}{E_v}\,\underline{\Sigma}$$

La déformation visco-plastique est calculée par :

$$e_{p\,II}(t) = \left[\frac{n_v + m_v}{m_v} K_T^{-n_v} \int_0^t s_{II}^{n_v}(t)\,dt \right]^{\frac{m_v}{m_v+n_v}}$$

puis

$$\underline{e_p}(t_1) = \left[\int_0^{t_1} K_T^{-n_v}\, s_{II}^{n_v-1}(t)\, e_{p\,II}^{-\frac{n_v}{m_v}}(t)\, A_1(t)\,dt \right] \underline{\Sigma}$$

avec

$$s_{II}(t) = \frac{t}{t_1}\left[\frac{p_1^2 r_0^2}{2h_0^2} + \frac{F_1^2}{6\pi^2 r_0^2 h_0^2} + \frac{c_1^2}{2\pi r_0^4 h_0^2} + \frac{p_1^2}{6} + \frac{p_1^2 r_0}{2h_0} + \frac{p_1 F_1}{6\pi r_0 h_0} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Tous calculs faits

$$\underline{e_p}(t_1) = K_T^{-\frac{m_v n_v}{m_v+n_v}} \left[\frac{m_v+n_v}{m_v[n_v+1]} \right]^{\frac{m_v}{m_v+n_v}} s_{II}(t_1)^{\frac{n_v[m_v-1]-m_v}{m_v+n_v}}\, t_1^{\frac{m_v}{m_v+n_v}}\, \underline{\Sigma}$$

La géométrie du cylindre et les différentes quantités dont les valeurs à l'instant t_1 sont nécessaires à la poursuite du calcul se déduisent immédiatement de ces formules.

III,4.3. Application particulière

Le cas d'application est constitué par un cylindre dont les dimensions initiales sont les suivantes :

- rayon moyen r_0 = 46,50 mm
- longueur utile l_0 = 400,00 mm
- épaisseur h_0 = 3,00 mm

Le matériau considéré est un Duralumin AU4G à l'état recuit.

Dans les programmes de sollicitation étudiés, la température peut évoluer entre 200 et 224 °C ; la variation est suffisamment lente pour que le champ de contrainte diffère peu du cas statique [101].

III,4.3.1. Détermination des caractéristiques du matériau

Les caractéristiques élastiques et visco-plastiques unidimensionnelles du Duralumin considéré ont été déterminées dans la gamme de température 200-220°C par les méthodes décrites aux paragraphes IV,2 et IV,3, à l'aide des appareils décrits aux paragraphes V,1, V,2, V,3. Les résultats sont portés sur la figure III,3 où les valeurs de E_v, ν_{ev}, K_v, m_v, n_v sont données en fonction de la température, et avec leur dispersion.

Les calculs étant très sensibles à de petites variations de ces coefficients, avant de les appliquer au cas tridimensionnel, il faut s'assurer qu'ils donnent bien des résultats cohérents dans un cas unidimensionnel significatif. Le fluage par paliers est bien adapté à ce problème, il permet un éventuel ajustement du coefficient K_v.

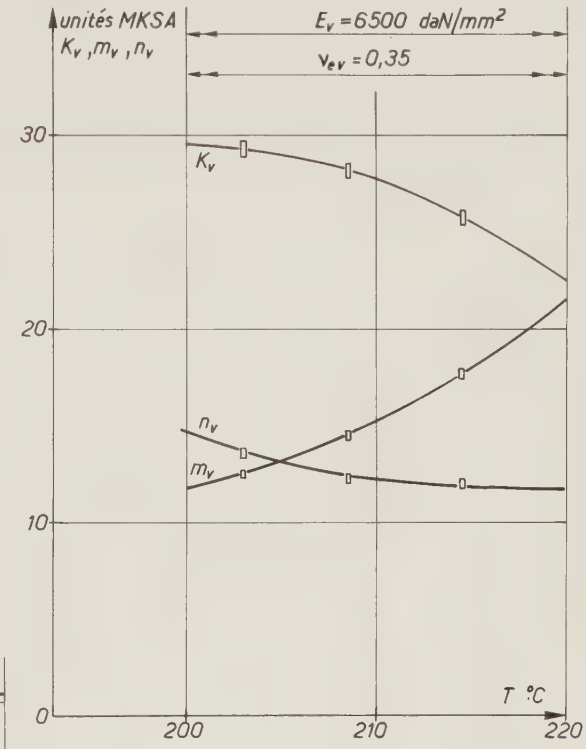
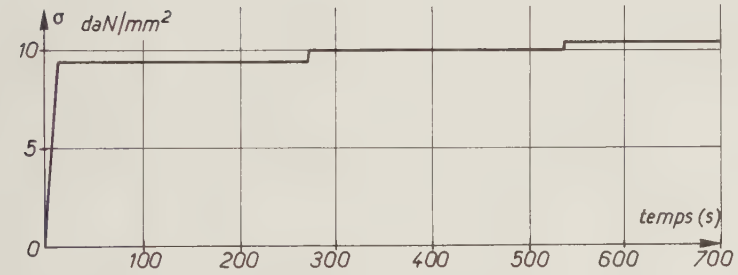
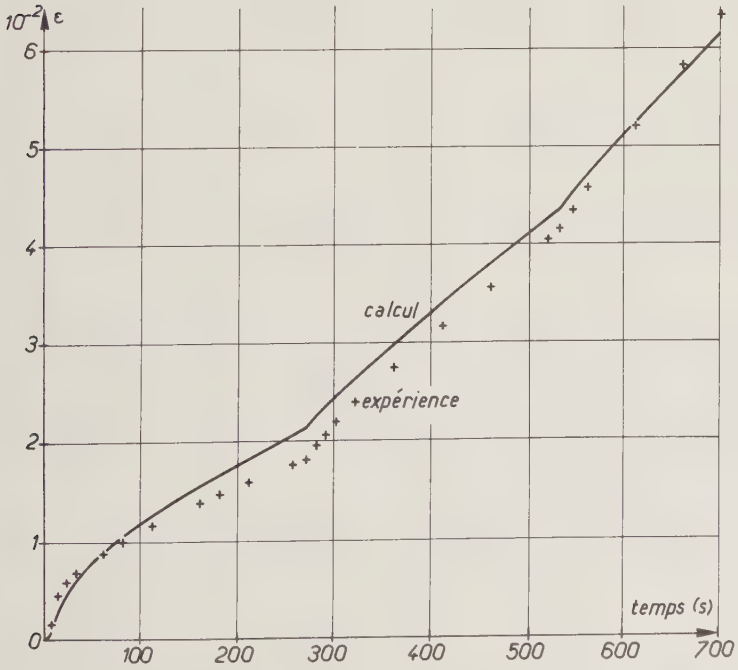


Fig. III,3 - Caractéristiques élastiques et visco-plastiques ▶
Duralumin AU4G recuit





La figure III,4 montre les résultats d'un calcul et d'une expérience de fluage par paliers, où l'on voit que le choix des coefficients permet une représentation du phénomène avec une marge d'erreur moyenne de 5 %.

◀ *Fig. III,4 - Fluage unidimensionnel par paliers*
Duralumin AU4G recuit
Température 208,5° C

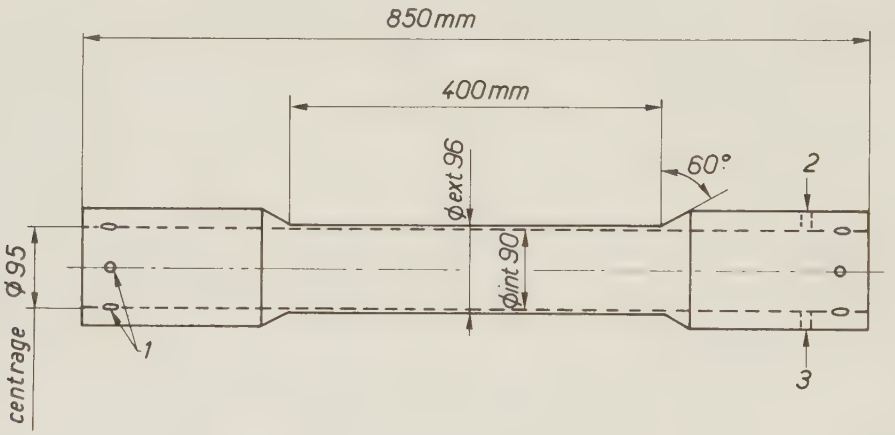
III,4.3.2. Calcul numérique des déformations du cylindre

Le calcul numérique est effectué par un programme de calcul réalisé par **J.L. Chaboche**, exploité sur un ordinateur IBM 360/50, et numéroté 416,800 dans la nomenclature O.N.E.R.A. [102]. Il concrétise la méthode de calcul exposée au paragraphe III,4.2; son organigramme fonctionnel est celui de la figure III,1. Le temps d'unité centrale pour un calcul complet est de 1 à 2 minutes.

III,4.3.3. Etude expérimentale

Les expériences ont été réalisées sur la machine de traction-torsion-compression décrite au paragraphe V,4.

- L'éprouvette est constituée d'une partie utile aux dimensions du cylindre étudié théoriquement, elle est raccordée à des têtes de fixation conformes au dessin de la figure III,5.
  Les conditions aux limites du cylindre expérimental sont donc différentes de celles du cylindre faisant l'objet du calcul, mais la valeur du rapport $\frac{r_o}{l_o} \simeq 12$ et des mesures d'accroissement du rayon le long d'une génératrice permettent de considérer que cette différence ne fausse pas la confrontation théorie-expérience d'une quantité supérieure aux erreurs de mesure inévitables.



1 - Trous de fixation 2 - Capteur de pression 3 - Arrivée du gaz sous pression

Fig. III,5 - Eprouvette pour essais en traction-torsion-compression-pression interne

- Les différentes éprouvettes sont réalisées dans des barres provenant de la même coulée et ayant subi le même traitement thermique que celles ayant servi à la réalisation des éprouvettes de traction simple destinées à la détermination des coefficients caractéristiques de la loi de comportement.
- Les différents programmes de charges $C(t)$, $F(t)$, $p(t)$ sont appliqués manuellement en fonction du temps, leur valeur exacte étant mesurée par un dynamomètre placé directement en série avec l'éprouvette et par un capteur de pression. Le problème le plus délicat est celui de l'obtention d'un champ de température uniforme sur le cylindre (constant ou évolutif dans le temps). Environ 50 thermocouples sont nécessaires pour son contrôle.
- Les mesures de déplacements $\Delta\theta$, Δl et Δr sont effectuées par des capteurs classiques, Δr est mesuré dans 3 plans diamétraux pour vérifier que le cylindre déformé ne s'éloigne pas trop d'un cylindre droit.
- L'ensemble des mesures est envoyé sur une chaîne de mesures numérique et d'acquisition automatique qui fournit un ruban perforé que l'on exploite sur ordinateur. L'ensemble de cette chaîne de mesure, de numérisation d'acquisition et de dépouillement est décrit très sommairement dans l'introduction du chapitre V.
- Le dépouillement consiste essentiellement en une transformation des grandeurs exprimées en unités électriques en grandeurs exprimées en unités mécaniques et en un calcul de la température moyenne. Le moment $C(t)$, la force $F(t)$, la pression $p(t)$, la température $T(t)$ constituent ainsi les données d'entrée du programme de calcul théorique. Les mesures des déplacements subissent en plus deux corrections en application de la méthode exposée au paragraphe IV,1.2 :
  - élimination des jeux dus à la machine
  - élimination des déformations élastiques de la machine et des têtes de l'éprouvette.

  Ce sont ces déplacements corrigés $\Delta\theta$, Δl, Δr, qui sont comparés avec les résultats du calcul.

– La précision des mesures de la force, du couple et de la pression est de l'ordre de 2 ‰ , celle des mesures de déplacements est de l'ordre de 0,5 %. La carte des températures est connue à ± 0,2°C près mais le champ n'est uniforme qu'à ± 2°C près.

III,4.4. Confrontation théorie-expérience, discussion

Pour étudier la validité de la loi de comportement dans des cas de chargement quelconque, avec un petit nombre d'essais, on a imaginé 3 programmes de charges aussi variés et sévères que possible, Ils sont représentés schématiquement sur la figure III,6 où l'on voit qu'ils contiennent :

– des variations de chacune des sollicitations : Force F , moment C , pression p

– des variations de température

– des «retours en arrière»

– une exploration systématique des quatre quadrants du plan des sollicitations principales Force et Couple.

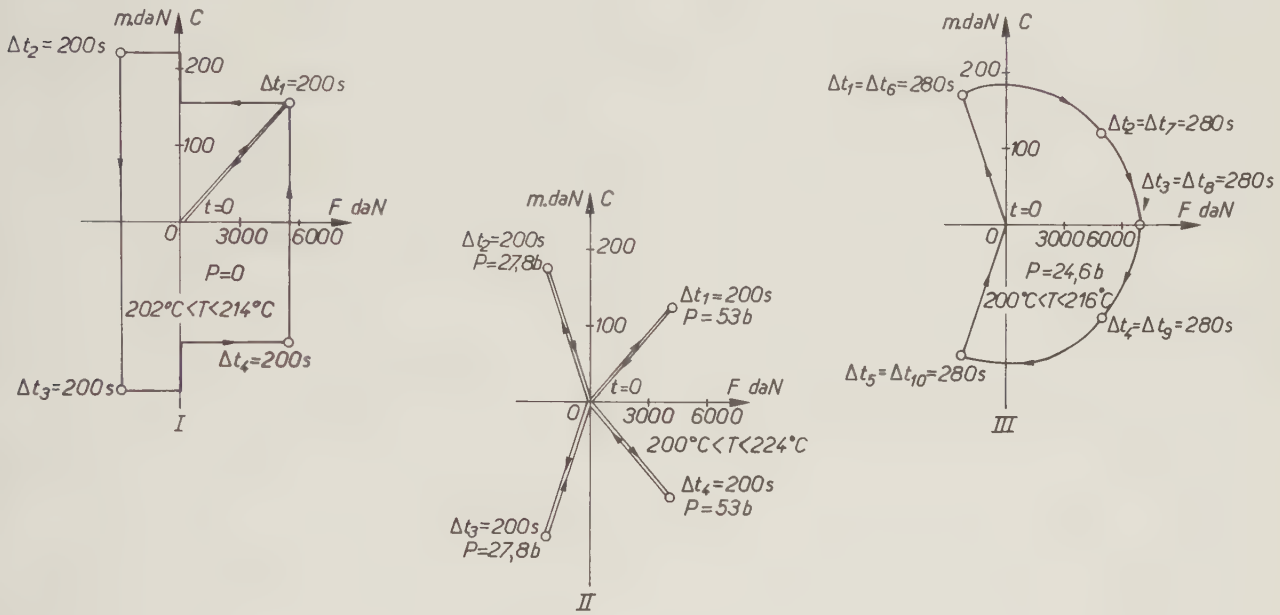


Fig. III,6 - Cas de chargements en traction-compression, torsion, pression interne

D'après la bibliographie qui a pu être faite, il semble que jamais des cas de chargements aussi complets et sévères en fluage n'aient été réalisés auparavant. Il faut dire qu'ils demandent des moyens d'expérimentation, de mesure et de calcul relativement importants.

Cas I - Le programme de sollicitation réel en fonction du temps est donné sur la figure III,7 où l'on peut se rendre compte de sa complexité. Il dure 2 200 secondes. Les sollicitations restent constantes pendant 4 périodes de 200 secondes environ et correspondent approximativement à la même valeur de s_{II} , La charge de compression est limitée à une valeur bien inférieure à celle de traction pour éviter le flambage de l'éprouvette lors de l'expérience.

Les résultats de calcul et les résultats expérimentaux sont comparés sur les figures III,8 - III,9 et III,10 pour les trois composantes du déplacement correspondant à l'allongement du cylindre, à sa rotation et à l'accroissement de son rayon ou gonflement. Il est difficile de chiffrer la différence relative par un seul pourcentage mais globalement, on peut dire qu'elle se situe dans la classe des 10 %, c'est-à-dire un ordre de grandeur tout à fait raisonnable compte tenu de la dispersion inhérente aux essais de fluage et de la simplicité de la loi utilisée. Remarquons que cette différence est très faible pendant les 300 premières secondes qui correspondent au trajet de chargement simple et qu'elle augmente en fonction du temps c'est-à-dire en fonction de l'histoire du chargement.

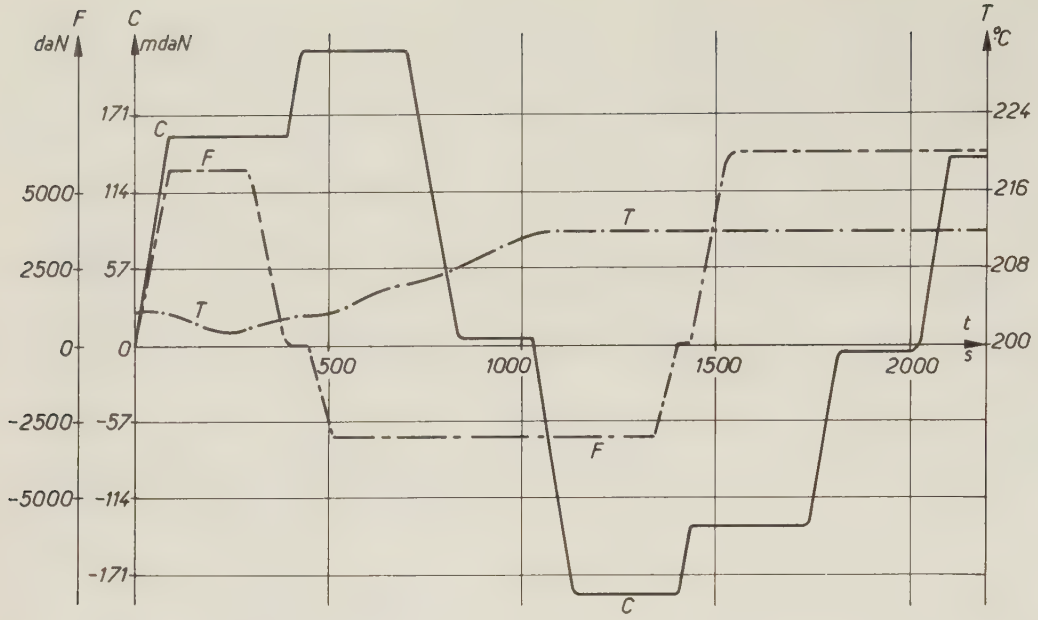


Fig. III,7 - Programme de sollicitations
(Cas I)

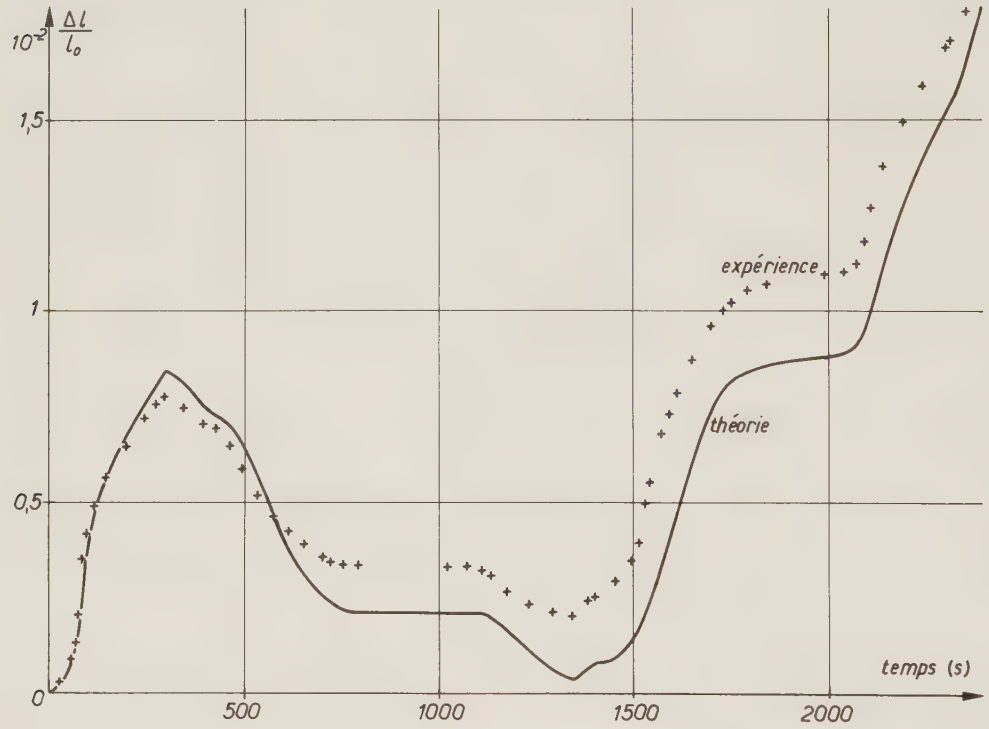


Fig. III,8 - Evolution d
l'allongeme
(Cas I)

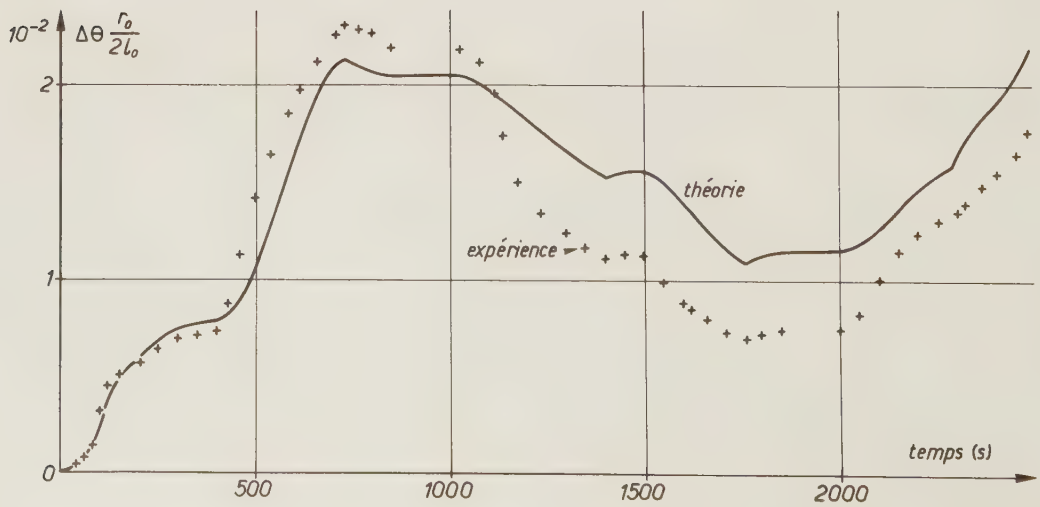


Fig. III,9 - Evolution
la rotatio
(Cas I)

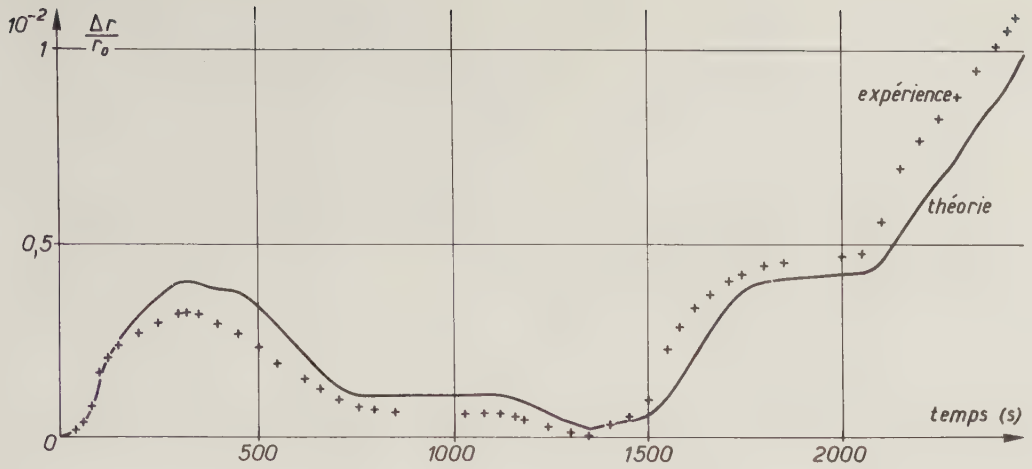


Fig. III,10 - Evolution du gonflement (Cas I)

Sur la figure III,11, on a comparé les valeurs expérimentales du paramètre d'écrouissage $\tilde{e}_{p\,II}$ et du paramètre $e_{p\,II}$ pour mettre en évidence leur différence. Ici, $\tilde{e}_{p\,II} \equiv e_{p\,II}$ jusqu'au temps $t \simeq 1000$ s auquel débute le retour en arrière, ensuite, $\tilde{e}_{p\,II}$ continue à croître alors que $e_{p\,II}$ diminue.

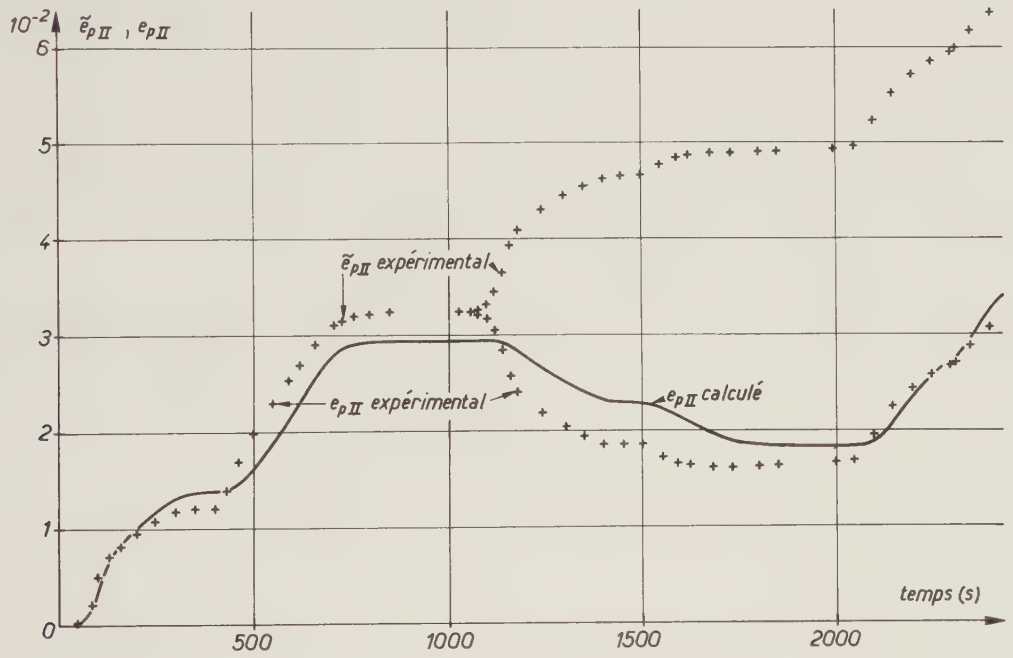


Fig. III,11 - Evolution du paramètre d'écrouissage $\tilde{e}_{p\,II}$ et du paramètre $e_{p\,II}$ - (Cas I)

Cas II - Le programme des sollicitations est donné sur la figure III,12. Dans ce cas, on a inclus une variation de pression. Les évolutions des 3 déformations du cylindre sont indiquées sur les figures III,13-III,14 et III,15. Les résultats de calcul concordent assez bien avec les résultats expérimentaux, même jusqu'à la fin du programme qui correspond pourtant à la rupture du cylindre par éclatement. Là, les déformations sont importantes comme en témoigne la variation du paramètre d'écrouissage donné sur la figure III,16 ($\tilde{e}_{p\,II\,Max} \simeq 6.10^{-2}$)

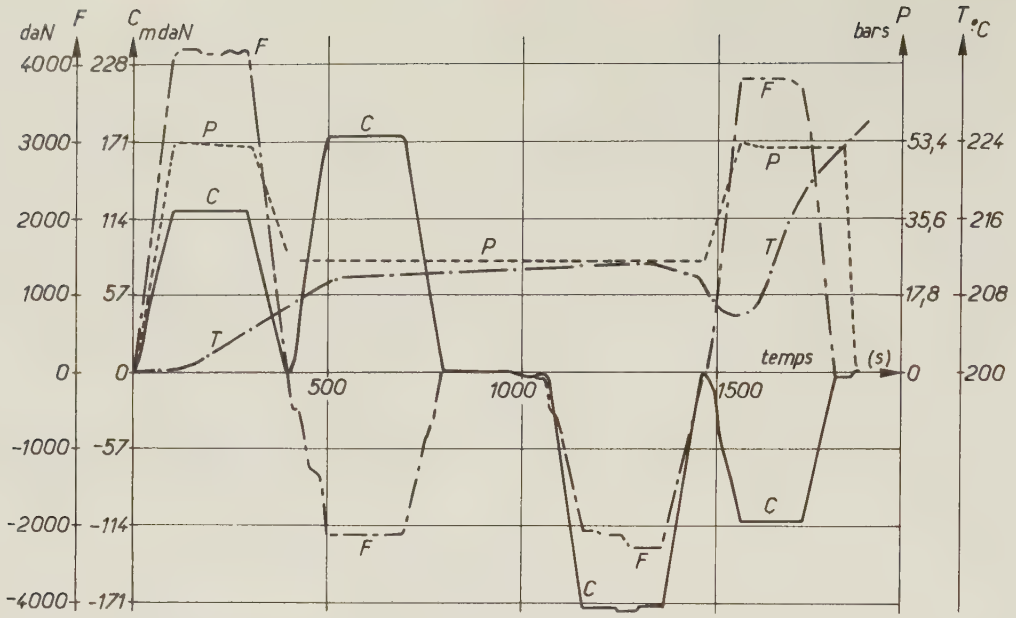


Fig. III,12 - Programme de sollicitations (Cas II)

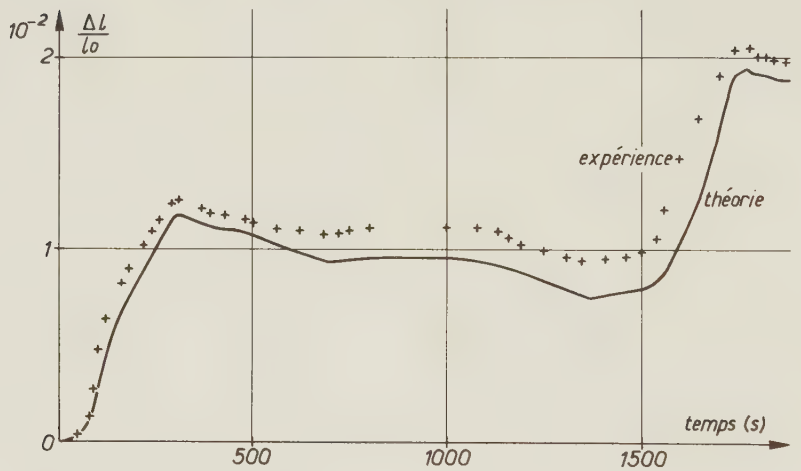


Fig. III,13 - Evolution de l'allongement (Cas II)

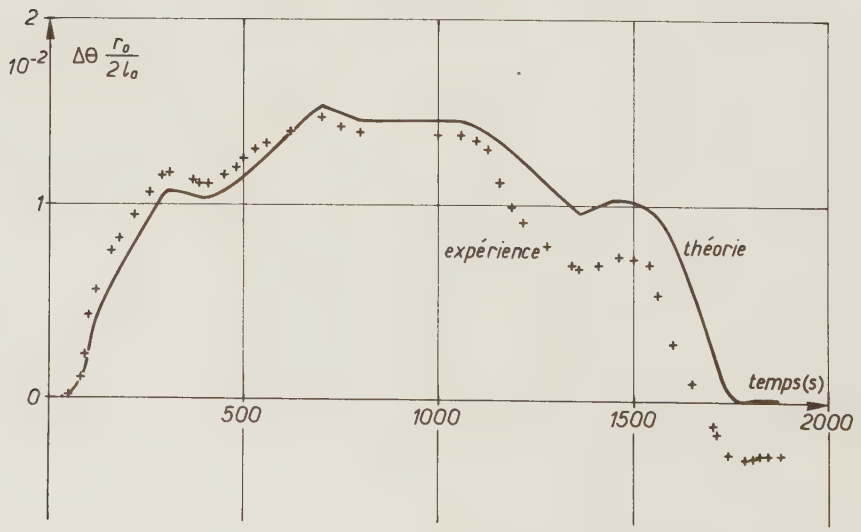


Fig. III,14 - Evolution de la rotation (Cas II)

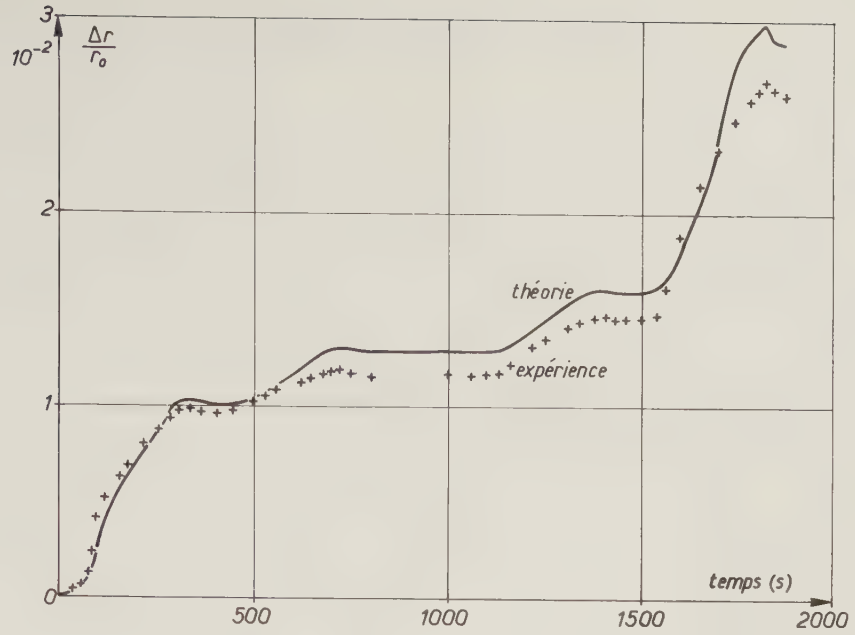


Fig. III,15 - Evolution du gonflement (Cas II)

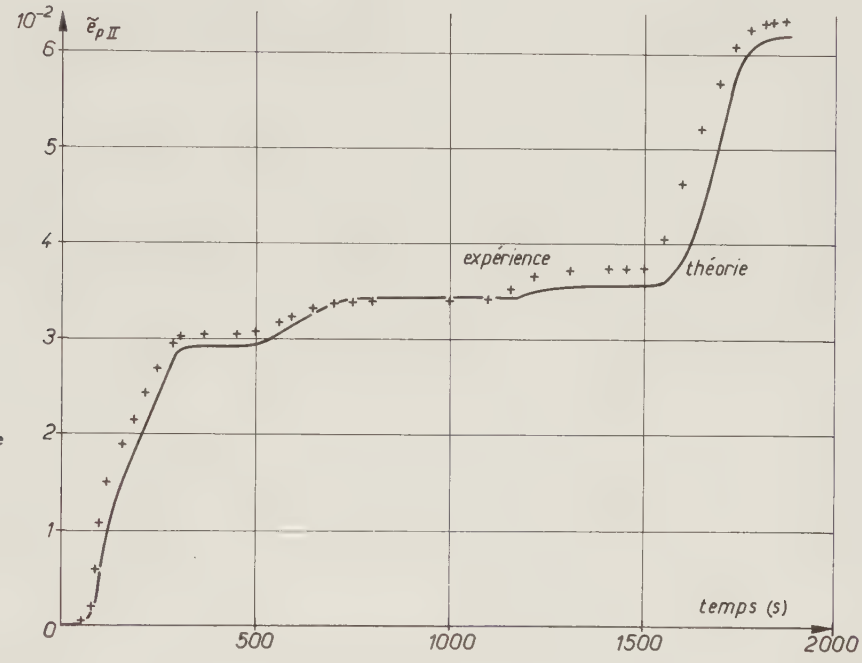


Fig. III,16 - Evolution du paramètre d'écrouissage (Cas II)

Cas III - La figure III,17 donne le programme de sollicitations qui s'étend sur 4000 s. Notons que le même programme de chargement a été effectué deux fois, c'est-à-dire que l'on a décrit deux cycles du cas III de la figure III,6.

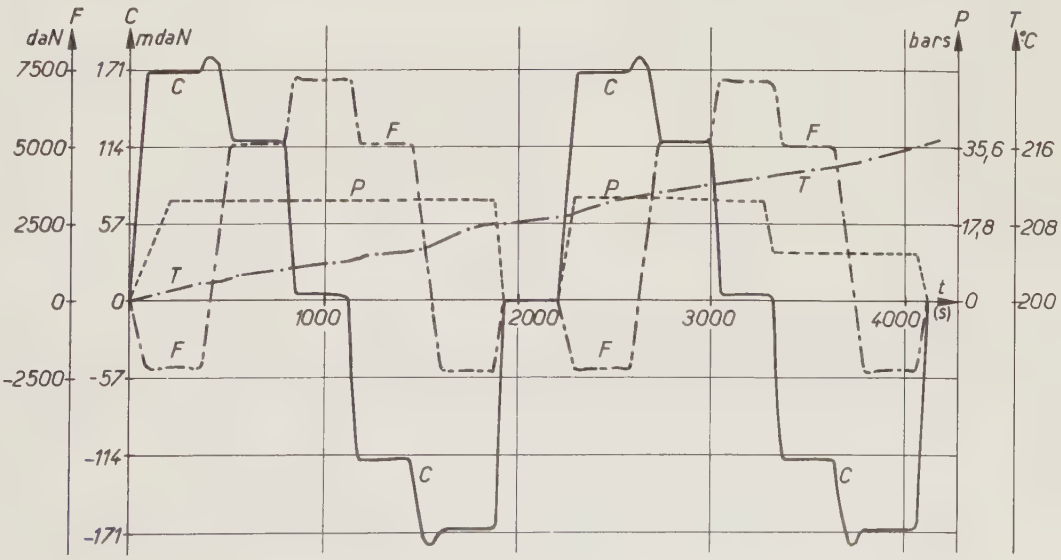


Fig. III,17 - Programme de sollicitations (Cas III) ▶

Les figures III,18 - III,19 et III,20 montrent les comparaisons entre les déformations calculées et mesurées. Les différences entre théorie et expérience sont du même ordre de grandeur que pour les cas précédents.

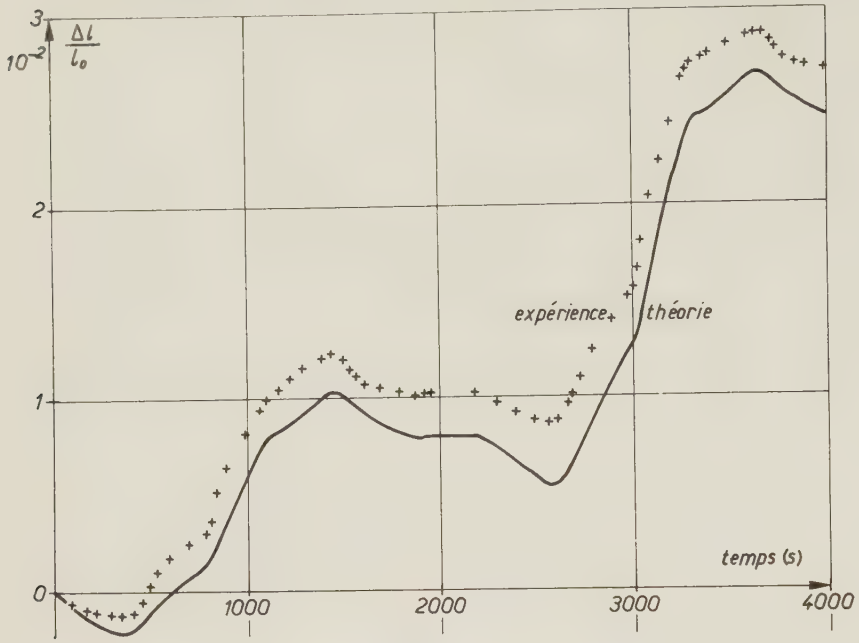


Fig. III,18 - Evolution de l'allongement
(Cas III)

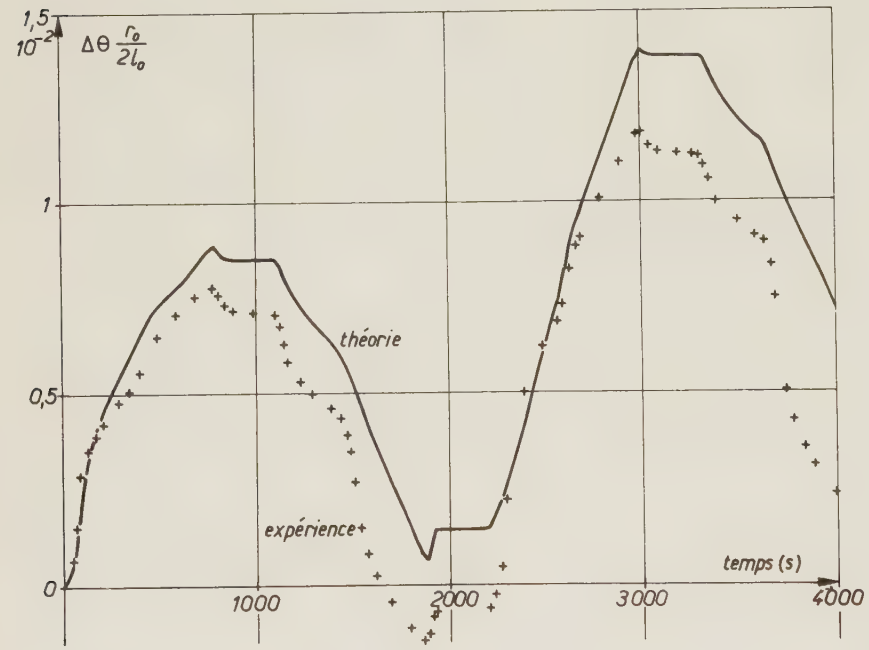


Fig. III,19 - Evolution de la rotation
(Cas III)

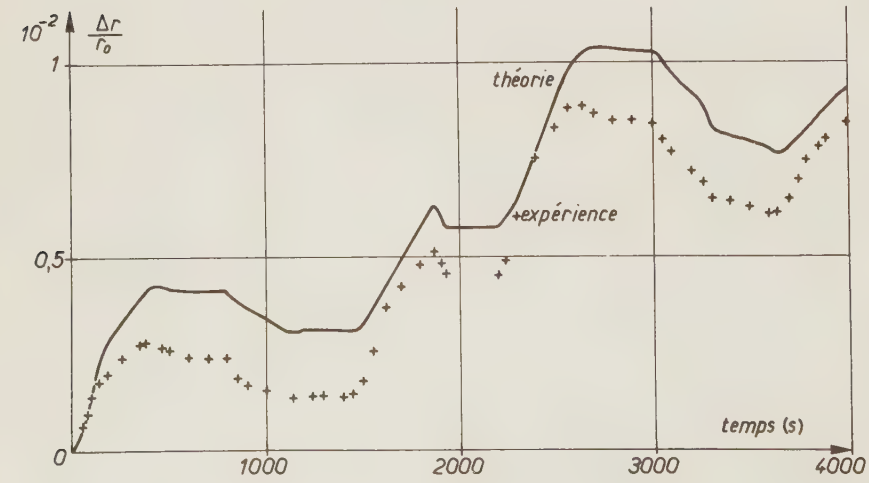


Fig. III,20 - Evolution du gonflement
(Cas III)

L'ensemble de ces résultats permet de tirer un certain nombre de conclusions.

- Tout d'abord, on peut dire que la théorie utilisée permet une prévision acceptable si l'on se limite à la connaissance de l'ordre de grandeur des déformations.
- Ces résultats renforcent la validité de l'hypothèse de l'existence d'une loi mécanique d'état en chargement quelconque, tout au moins pour les matériaux stables, ce qui était le but de l'étude. Ils montrent que la température peut être introduite comme paramètre de variation des coefficients de la loi, déterminés dans des cas isothermes, pourvu que la variation de température soit assez lente.
- Le paramètre de cumulation d'écrouissage introduit semble donner d'assez bons résultats mais il convient de faire une remarque. Dans les 3 cas, on peut dire que, globalement, les différences entre calculs théoriques et résultats expérimentaux augmentent au fur et à mesure du développement du programme et surtout après les retours en arrière. Il est difficile d'incriminer seule la forme du paramètre d'écrouissage car il est probable que cette différence croissante soit due à l'anisotropie créée par la déformation visco-plastique dont, ni la théorie, ni le paramètre d'écrouissage ne tiennent compte. On atteint sans doute là les limites d'une théorie isotrope à deux paramètres.
- Lors de la détermination des caractéristiques visco-plastiques unidimensionnelles, on a décelé une certaine variation des coefficients K_v, m_v, n_v en fonction de la déformation visco-plastique ϵ_{vp} comme il est dit au paragraphe II,4. Le calcul du cylindre a été repris en tenant compte de ces variations, mais sans amélioration sensible des résultats ; par contre, la préparation du calcul est beaucoup plus laborieuse. D'une manière plus générale d'ailleurs, il semble bien que les expériences et les calculs tridimensionnels soient moins «sensibles» à de petites variations des coefficients ou paramètres que les expériences ou calculs unidimensionnels. Ceci est plus un sentiment subjectif qu'une analyse mais il est fréquent de constater que la dispersion est moins importante dans les cas tridimensionnels que dans les cas unidimensionnels.

Il était intéressant de comparer ces résultats avec ceux qui peuvent être obtenus par une théorie plus élaborée : la loi intégrale de **A. Souissi** citée au paragraphe I,3.3 [17]. Comme cette loi ne rend pas compte des retours en arrière, elle ne pouvait être appliquée à l'un des 3 cas étudiés ici. C'est donc la loi différentielle qui a été appliquée au cas du calcul du cylindre, étudié pour vérifier la loi intégrale [18]. Il s'agissait du même cylindre soumis aux mêmes types de sollicitations mais par des programmes moins tourmentés. Les résultats sont présentés de la même manière que les précédents : la figure III,21 donne le programme de sollicitations. Il s'éloigne passablement du chargement simple mais sans retour en arrière.

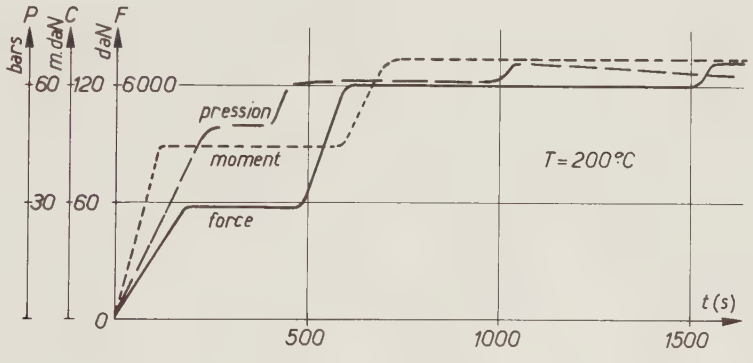


Fig. III,21 - Programme de sollicitations

(cylindre AU4G recuit, [17])

Les figures III,22- III,23 et III,24 indiquent, pour 3 composantes de la déformation du cylindre, les résultats expérimentaux et les résultats de calcul, par la loi intégrale et par la loi différentielle. On remarque que la loi intégrale donne de meilleurs résultats lors des accroissements brusques de charge mais, dans l'ensemble, les différences entre les résultats des deux théories et les résultats expérimentaux sont du même ordre de grandeur.

Ceci apporte une justification de plus à l'emploi de la loi différentielle bien adaptée aux calculs de structures par maillage et pas à pas.

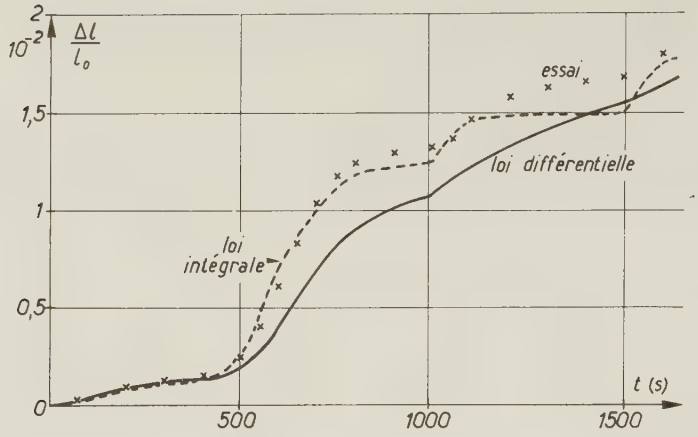


Fig. III,22 - Evolution de l'allongement

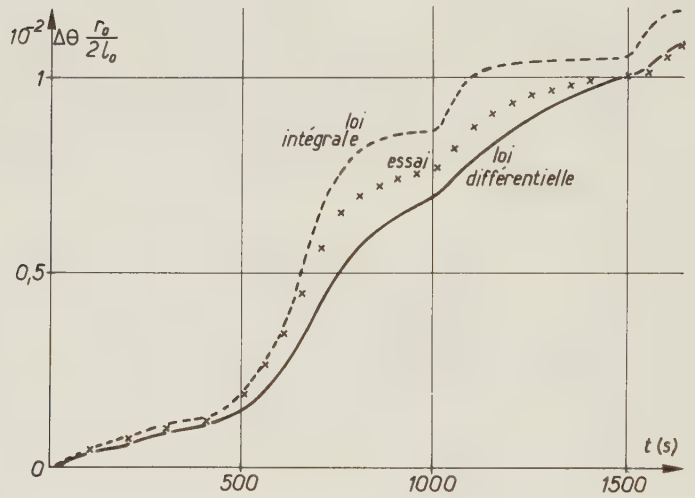


Fig. III,23 - Evolution de la rotation

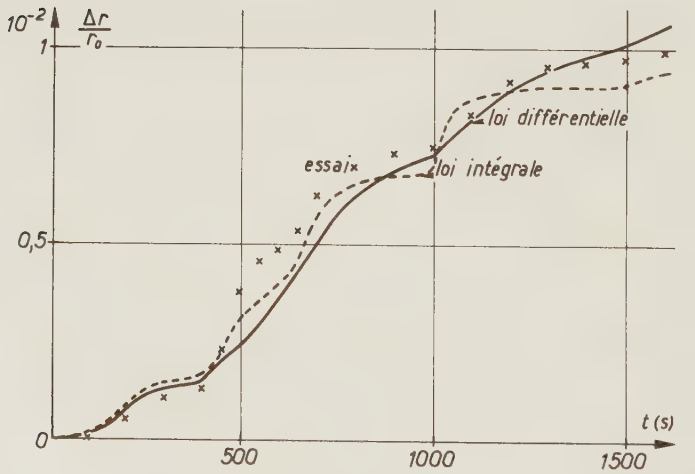


Fig. III,24 - Evolution du gonflement

Dans les chapitres II et III, on a établi et vérifié des types de lois de comportement unidimensionnelles et tridimensionnelles valables en chargement quelconque, dans les deux chapitres suivants, on va étudier un certain nombre d'applications concrètes qui en découlent.

CHAPITRE IV

DÉVELOPPEMENT DE MÉTHODES D'ESSAIS

Les méthodes exposées ici constituent des applications des résultats obtenus dans les chapitres précédents ; elles correspondent à des problèmes concrets de la résistance des matériaux et sont utilisées couramment dans les études de mécanique des solides effectuées à l'O.N.E.R.A. ; certains développements sont en cours dans d'autres laboratoires.

IV,1. Méthode de mesure de la déformation dans l'essai en traction simple

IV,1.1. Principe de la méthode, procédure

Comme on l'a vu au paragraphe II,3.2.3, la mesure directe de la déformation longitudinale est toujours délicate car il est difficile de matérialiser le déplacement de deux points situés sur la partie utile de l'éprouvette, et particulièrement à haute température. Ici, une méthode indirecte est proposée, la mesure locale est abandonnée au profit d'une mesure de déplacement effectuée hors de l'éprouvette et de la zone chauffée de la machine (fig. IV,1).

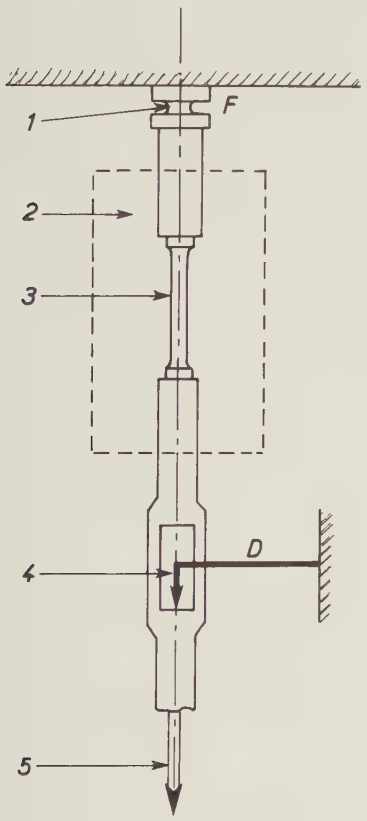


Fig. IV,1 - Principe des mesures dans l'essai en traction simple

1 - Dynamomètre
2 - Four
3 - Eprouvette
4 - Capteur de déplacement
5 - Force appliquée

Ce déplacement D correspondant à une force F mesurée par le dynamomètre comprend :

- le déplacement ΔL correspondant à la déformation de la partie utile de l'éprouvette de longueur initiale L_o
- le déplacement ΔL_t correspondant aux déformations des têtes de l'éprouvette
- le déplacement ΔL_m correspondant aux déformations de la machine

Le principe de la méthode consiste à réaliser l'opération :

$$\Delta L = D - \left[\Delta L_t + \Delta L_m \right]$$

Pour cela, un certain nombre d'hypothèses sont nécessaires :

- Les déformations de la machine sont supposées être :
  - des jeux, c'est-à-dire des déplacements ΔL_{mj} obtenus sous très faible charge $F < F_m$
  - des déformations élastiques linéaires ΔL_{me} (une machine de traction précise est toujours très surdimensionnée)

$$\Delta L_m = \Delta L_{mj} + \Delta L_{me}$$

- Le matériau étudié est élasto-visco-plastique, il possède un domaine pratique d'élasticité linéaire correspondant à :

$$F < F_M$$

Son module d'élasticité E est supposé connu au préalable.

La courbe Force-Déplacement a généralement l'allure indiquée sur la figure IV,2.

$F < F_m$ ⟶ zone des rattrapages de jeux

$F_m \leq F < F_M$ ⟶ zone pratique de linéarité

$F \geq F_M$ ⟶ zone des déformations permanentes

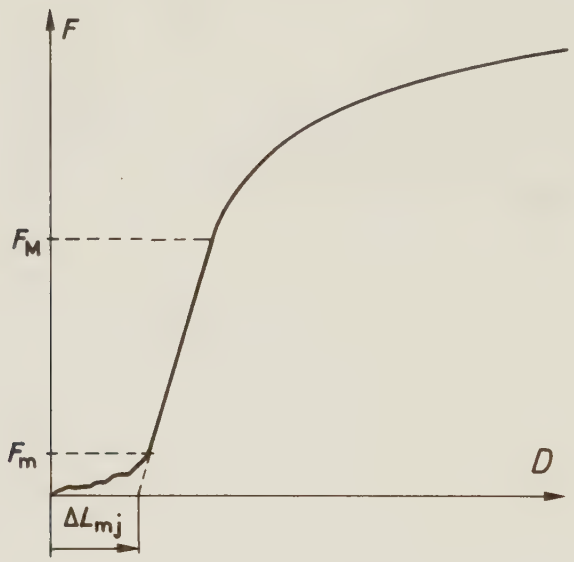


Fig. IV,2 - Courbe Force-Déplacement dans un essai en traction simple

Les hypothèses énoncées permettent d'écrire :

$$F_m \leq F < F_M \longrightarrow \frac{dD}{dF} = \frac{1}{R}$$

Le coefficient R représente la raideur de l'ensemble éprouvette et machine. Il peut être aisément mesuré à chaque expérience.

Les jeux étant supposés rattrapés pour $F < F_m$, ΔL_{mj} s'obtient par extrapolation, pour $F = 0$, de la droite définie dans le domaine $F_m \leq F < F_M$

$$\Delta L_{mj} = D \quad (F=0 \text{ par extrapolation})$$

Le déplacement ΔL correspondant aux déformations de la partie utile de l'éprouvette peut être décomposé en déplacement élastique ΔL_e et déplacement visco-plastique ΔL_p (hypothèse de partition)

$$\Delta L = \Delta L_e + \Delta L_p$$

De même, pour les têtes de l'éprouvette

$$\Delta L_t = \Delta L_{te} + \Delta L_{tp}$$

On a donc :

$$\Delta L_e + \Delta L_p = D - \left[\Delta L_{te} + \Delta L_{tp} + \Delta L_{me} + \Delta L_{mj} \right]$$

Le déplacement élastique total est relié simplement à la force :

$$\Delta L_e + \Delta L_{te} + \Delta L_{me} = \frac{F}{R}$$

d'où

$$\boxed{\Delta L_p + \Delta L_{tp} = D - \Delta L_{mj} - \frac{F}{R}}$$

Détermination de ΔL_{tp}

La tête de toute éprouvette (fig. IV,3) peut se décomposer en :

- une partie de fixation dimensionnée pour travailler toujours dans le domaine pratique d'élasticité
- une partie de raccordement entre cette partie de fixation et la partie utile de l'éprouvette de diamètre initial d_o (section S_o) de longueur initiale L_o .

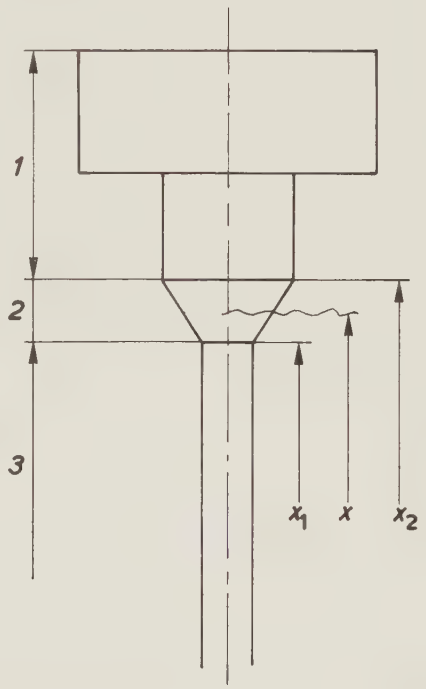


Fig. IV,3 - Schéma d'une éprouvette de traction simple ▶

Si x_1 et x_2 définissent les cotes de la partie de raccordement par rapport au milieu de l'éprouvette : : :

$$\Delta L_{tp} = 2 \int_{x_1}^{x_2} \epsilon_p(x)\, dx$$

En faisant le changement de variable défini par la géométrie de la partie de raccordement :

$$\sigma = \gamma^{-1}(x) \longrightarrow \frac{dx}{d\sigma} = \frac{d\gamma(\sigma)}{d\sigma} = \gamma'(\sigma)$$

$$\Delta L_{tp} = 2 \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \epsilon_p(\sigma_x)\, \gamma'(\sigma_x)\, d\sigma_x$$

avec $\sigma_1 = \sigma(x_1) = \sigma$: contrainte dans la partie utile

$\sigma_2 = \sigma(x_2)$

La fonction $\epsilon_p(\sigma_x)$ n'est pas connue a priori puisqu'elle caractérise le matériau, mais comme il s'agit d'un terme correctif petit, il est possible d'effectuer un calcul approché itératif de l'intégrale [68], la fonction $\epsilon_p(\sigma_x)$ étant définie par valeurs numériques et approchée au premier pas d'itération par :

$$\epsilon_p = \frac{\Delta L_p + \Delta L_{tp}}{L_o}$$

On peut aussi, dans certains cas, négliger le terme ΔL_{tp}. Pour le montrer, calculons la valeur du rapport $\frac{\Delta L_{tp}}{\Delta L_p}$ dans le cas particulier de l'éprouvette définie à la figure IV,4,

$$\frac{\Delta L_{tp}}{\Delta L_p} = \frac{2\int_{\sigma}^{\sigma_2} \epsilon_p(\sigma_x)\,\gamma'(\sigma_x)\,d\sigma_x}{\epsilon_p(\sigma)\,L_o}$$

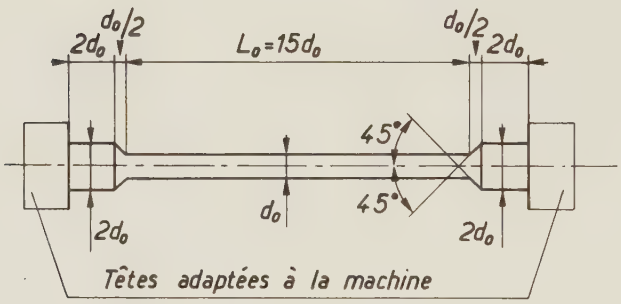


Fig. IV,4 - Eprouvette cylindrique de traction simple.
Série T

La partie de raccordement en forme de cône définit le changement de variable suivant :

$$\gamma'(\sigma_x) = -\frac{d_o}{4}\,\sigma^{\frac{1}{2}}\,\sigma_x^{-\frac{3}{2}}$$

Pour exprimer $\epsilon_p(\sigma_x)$ en fonction de $\epsilon_p(\sigma)$ nous adoptons la loi de comportement (voir chapitre II)

$$\sigma = K\,\epsilon_p^{\frac{1}{m}}\,\dot{\epsilon}_p^{\frac{1}{n}}$$

qui, dans le cas d'une contrainte imposée $\sigma(t)$, est une équation différentielle à variables séparées qui s'intègre immédiatement avec la condition initiale

$$t = 0 \longrightarrow \epsilon_p = 0$$

$$\epsilon_p = \left[\frac{n+m}{m}\int_o^t \left[\frac{\sigma}{K}\right]^n dt\right]^{\frac{m}{n+m}}$$

formule qui montre que

$$\epsilon_p(k\,\sigma(t)) = \epsilon_p(\sigma(t))\;k^{\frac{nm}{n+m}} \qquad \forall k \text{ scalaire positif}$$

d'où

$$\epsilon_p(\sigma_x) = \epsilon_p(\sigma) \left[\frac{\sigma_x}{\sigma}\right]^{\frac{nm}{n+m}}$$

On a alors :

$$\frac{\Delta L_{tp}}{\Delta L_p} = -\frac{d_o}{2L_o}\,\sigma^{\left[\frac{1}{2}-\frac{nm}{n+m}\right]} \int_{\sigma}^{\frac{\sigma}{4}} \sigma_x^{\frac{nm}{n+m}-\frac{3}{2}}\, d\sigma_x$$

$$\frac{\Delta L_{tp}}{\Delta L_p} = \frac{d_o}{2L_o}\,\frac{\sigma^{\left[\frac{1}{2}-\frac{nm}{n+m}\right]}}{\frac{nm}{n+m}-\frac{1}{2}}\;\sigma^{\left[\frac{nm}{n+m}-\frac{1}{2}\right]}\left[1-\frac{1}{4^{\frac{nm}{n+m}-\frac{1}{2}}}\right]$$

Les valeurs usuelles de m et n montrent que : $\frac{nm}{n+m} > 3$

d'où

$$\boxed{\frac{\Delta L_{tp}}{\Delta L_p} \simeq \frac{d_o}{L_o\left[\frac{2nm}{n+m}-1\right]} < \frac{d_o}{5L_o}}$$

Dans le cas de l'éprouvette de la figure IV,4

$$\frac{\Delta L_{tp}}{\Delta L_p} < 1{,}33\,\%$$

Dans de nombreux cas on pourra donc négliger ΔL_{tp} devant ΔL_p .
La quantité ΔL_{tp} étant négligée ou calculée (le calcul complet est développé en référence [68]), on a :

$$\Delta L_p = D - \Delta L_j = \frac{F}{R} - \Delta L_{tp}$$

d'où

$$\Delta L = D - \Delta L_j - \frac{F}{R} - \Delta L_{tp} + \frac{F}{ES_o}$$

et

$$\boxed{\epsilon = \frac{1}{L_o}\left[D - \Delta L_j - \Delta L_{tp} - F\left[\frac{1}{R} - \frac{L_o}{ES_o}\right]\right]}$$

Notons que dans le cas où ΔL_{tp} est négligé, ΔL_p (et donc $\epsilon_p = \frac{\Delta L_p}{L_o}$) s'obtient facilement par la construction graphique de la figure IV,5 sur le diagramme des résultats bruts Force-Déplacement de l'essai.

Un appareil électronique décrit au paragraphe V,1 a été réalisé pour effectuer cette opération automatiquement et en temps réel.

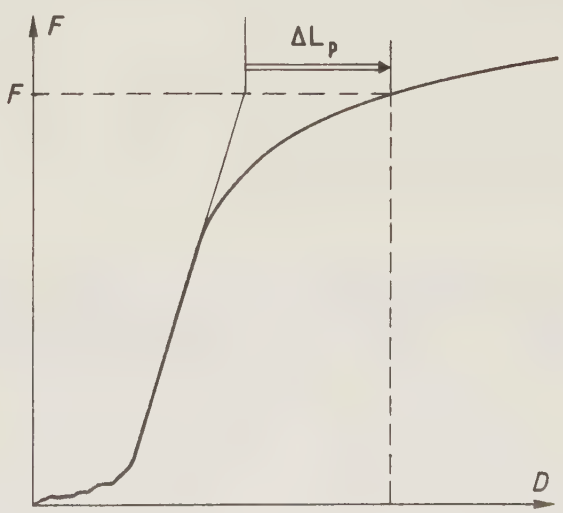


Fig. IV,5 - Obtention directe de : ▶

$$\epsilon_p \# \frac{\Delta L_p}{L_o}$$

Les sources d'imprécision de l'application de cette méthode résident essentiellement dans les défauts plus ou moins importants des machines utilisées, particulièrement en ce qui concerne la fidélité et la linéarité de leur raideur.

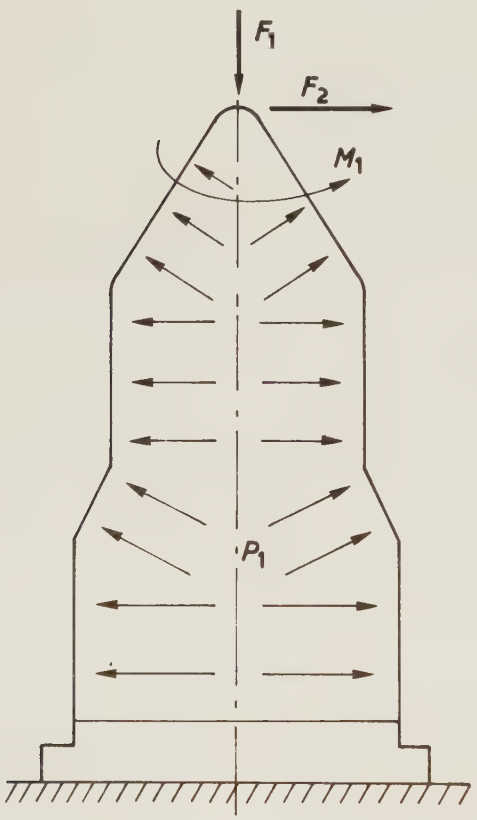
Les nombreuses vérifications directes (à la température ambiante par jauges de déformation) ou indirectes qui ont pu être effectuées montrent que les erreurs que l'on peut commettre varient de $\frac{\delta \epsilon_p}{\epsilon_p} \simeq 1\ \%$ pour les machines très soignées à $\frac{\delta \epsilon_p}{\epsilon_p} \simeq 5\ \%$ pour les machines de qualité moyenne.

IV,1.2. Extension au cas tridimensionnel

Il est possible de généraliser cette méthode au cas d'expériences bidimensionnelles ou tridimensionnelles à la condition que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

- Le matériau constitutif de l'éprouvette ou de la structure est élasto-visco-plastique, il possède un domaine pratique d'élasticité linéaire.
- Les déformations parasites provenant des systèmes d'application des efforts sont :
  - des jeux
  - des déformations élastiques linéaires
- Le principe de superposition s'applique à la structure pour ses déplacements élastiques. Il s'agit là d'une condition restrictive importante sur le plan théorique mais admissible dans la pratique.

Soit une structure répondant à ces conditions, soumise à un ensemble de sollicitations et à des conditions de liaison (fig. IV,6).



Soit D_i un des i_M déplacements mesurés

Soit F_q l'un des q_M forces ou moments appliqués.

Supposons qu'au début de l'essai il soit possible d'appliquer simultanément les q_M forces d'une quantité faible mais telle que tous les jeux soient rattrapés.

◀ *Fig. IV,6 - Essai d'une structure complexe*

Sur les courbes représentatives de chaque déplacement D_i en fonction de la force F_{q_i} dont la contribution est prépondérante dans ce déplacement, il est facile d'obtenir par extrapolation pour $F_{q_i} = 0$ le déplacement D_{ij} correspondant aux jeux (fig. IV,7).

$$D_{ij} = D_i \quad (F_{q_i} = 0 \text{ par extrapolation})$$

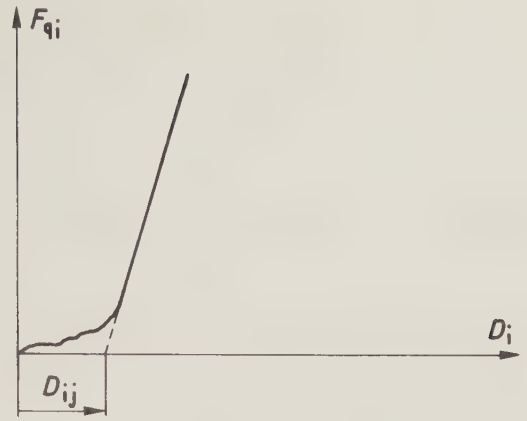
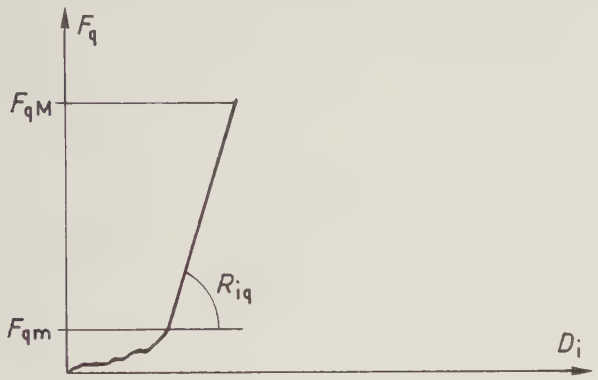


Fig. IV,7 - Détermination des jeux

Ensuite les forces F_q sont appliquées successivement dans un domaine borné par les valeurs correspondant au rattrapage des jeux F_{qm} et à la limite pratique d'élasticité F_{qM}

$$F_{qm} \leq F_q < F_{qM}$$

Dans ce domaine, pour chaque déplacement D_i, on peut déterminer les raideurs partielles R_{iq} (fig. IV,8)



$$\frac{1}{R_{iq}} = \frac{dD_i}{dF_q}$$

$$1 \leq q \leq q_M$$

Fig. IV,8 - Détermination des raideurs partielles

Le principe de superposition permet de calculer la partie élastique D_{ie} de chaque déplacement par :

$$D_{ie} = \sum_{q=1}^{q_M} \frac{F_q}{R_{iq}}$$

D'après les propriétés des corps élasto-visco-plastiques, cette formule restera valable quel que soit l'état de sollicitation, d'où la partie visco-plastique D_{ip} de chaque déplacement :

$$D_{ip} = D_i - D_{ij} - \sum_{q=1}^{q_M} \frac{F_q}{R_{iq}}$$

Comme dans le cas unidimensionnel, il reste bien entendu à éliminer les déplacements visco-plastiques éventuels correspondant aux éléments de raccordement entre la structure et les liaisons du dispositif expérimental. Là, une étude spéciale doit être effectuée dans chaque cas particulier.
Cette méthode a été appliquée au cas du cylindre étudié au paragraphe III,4.3.

IV,2. Méthode de mesure des caractéristiques statiques d'élasticité linéaire

La mesure du module d'**Young** et du coefficient de **Poisson** a fait l'objet de nombreux travaux desquels on peut dégager deux tendances :

- Les mesures sont effectuées lors d'un essai statique en traction simple. La mesure de la déformation est réalisée par un extensomètre fixé sur la partie utile de l'éprouvette, ce qui, pratiquement, exclut la possibilité d'utiliser ces méthodes « statiques » aux températures élevées.
- Les deux coefficients d'élasticité sont tirés de résultats d'essais dynamiques dans lesquels l'éprouvette est l'élément élastique d'un système vibrant, ou bien est le siège d'une propagation acoustique [103-104-105]. Ces méthodes plus modernes que les précédentes sont aussi plus précises. Outre certaines difficultés technologiques à haute température, elles présentent l'inconvénient de donner des coefficients « dynamiques », déterminés au voisinage de la contrainte nulle, qui, pour beaucoup de matériaux, diffèrent notablement des coefficients « statiques » [106] (Le module d'**Young** dynamique est en général plus élevé que le module statique). Ces différences proviennent du fait que les matériaux ne sont pas parfaitement élastiques ; or, dans un calcul de résistance de structure, on a le devoir d'introduire les données correspondant au cas d'utilisation, c'est-à-dire dans la plupart des cas les coefficients quasi statiques déterminés dans tout le domaine pratique d'élasticité.

On a donc développé une méthode dite « des raideurs comparées » dans laquelle les coefficients statiques sont obtenus par comparaison des résultats de deux groupes de deux essais quasi-statiques exécutés sur des éprouvettes de géométries différentes. Cette méthode qui ne fait appel à aucune mesure locale de déformation peut être utilisée à toute température ; la précision des résultats est en général du même ordre de grandeur que pour les méthodes statiques classiques.

IV,2.1. Module d'Young

IV,2.1.1. Principe de la méthode

Considérons une expérience d'écrouissage en traction simple définie schématiquement sur la figure IV,9.

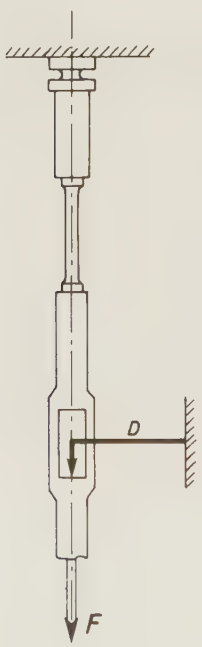


Fig. IV,9 - Principe d'un essai en traction simple

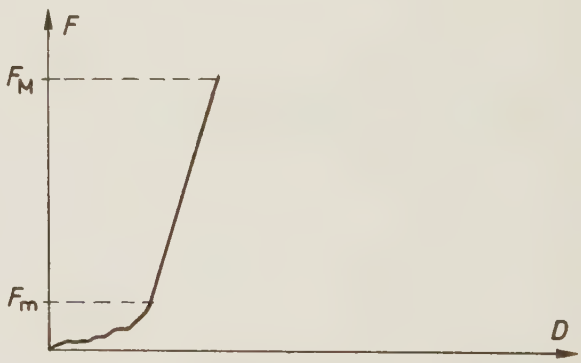


Fig. IV,10 - Courbe Force-Déplacement

Rappelons que sur la courbe résultat Force F, Déplacement D (fig. IV,10), pour les matériaux élasto-visco-plastiques, il est possible de définir un domaine pratique de linéarité (cf. paragraphe IV,1.1)

$$F_m \leq F < F_M$$

$$\frac{dD}{dF} = \frac{1}{R}$$

La raideur totale R provient :

– de la raideur de la partie utile de l'éprouvette et des parties de raccordement : R_e

– de la raideur des têtes de l'éprouvette et de la machine : R_{tm}

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_{tm}}$$

Considérons deux expériences réalisées dans les mêmes conditions, sur la même machine, avec deux éprouvettes A et B ayant des têtes identiques mais des parties utiles de géométrie différente. Les résultats des deux expériences s'expriment par :

$$\frac{1}{R_A} = \frac{1}{R_{eA}} + \frac{1}{R_{tm}}$$

$$\frac{1}{R_B} = \frac{1}{R_{eB}} + \frac{1}{R_{tm}}$$

R_A et R_B résultent de la mesure, R_{eA} et R_{eB} s'expriment en fonction de la géométrie connue des éprouvettes A et B et du module d'élasticité E. Le système de ces deux équations a donc deux inconnues E et R_{tm}, d'où le module d'**Young** E.

IV,2.1.2. Formules particulières

Considérons deux éprouvettes A et B de géométrie générale définie à la figure IV,11.
En négligeant la variation de géométrie, la raideur de la partie utile cylindrique est :

$$R_u = \frac{ES_0}{L_0}$$

la raideur des parties de raccordement côniques est :

$$R_r = \frac{E}{\frac{d_0}{S_0} - \frac{d_1}{S_1}}$$

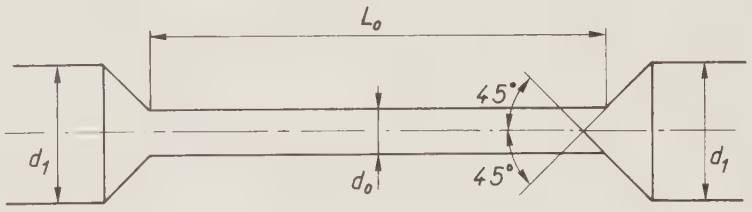


Fig. IV,11 - Eprouvette cylindrique pour la mesure des caractéristiques élastiques

Pour les deux éprouvettes A et B :

$$A \begin{cases} d_{0A}\ S_{0A} \\ L_{0A} \\ d_1\ S_1 \end{cases} \qquad B \begin{cases} d_{0B}\ S_{0B} \\ L_{0B} \\ d_1\ S_1 \end{cases}$$

les deux équations s'écrivent

$$\frac{1}{R_A} = \frac{L_{0A}}{ES_{0A}} + \frac{\frac{d_{0A}}{S_{0A}} - \frac{d_1}{S_1}}{E} + \frac{1}{R_{tm}}$$

$$\frac{1}{R_B} = \frac{L_{0B}}{ES_{0B}} + \frac{\frac{d_{0B}}{S_{0B}} - \frac{d_1}{S_1}}{E} + \frac{1}{R_{tm}}$$

d'où

$$E = \frac{\frac{L_{0A} + d_{0A}}{S_{0A}} - \frac{L_{0B} + d_{0B}}{S_{0B}}}{\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}}$$

IV,2.1.3. Procédure, résultats

Les sources d'imprécision de cette détermination peuvent provenir :

- soit de la mesure de R : Les machines de traction n'étant jamais rigoureusement linéaires, il sera bon d'opérer dans la même gamme de force pour les deux éprouvettes (fig. IV,10)

$$F_{MA} \not\approx F_{MB}$$

- soit du calcul numérique qui est un rapport de deux différences de grandeurs expérimentales : il est souhaitable que :

$$R_A \ll R_B$$

ce qui entraîne

$$\frac{L_{0A}}{S_{0A}} \gg \frac{L_{0B}}{S_{0B}}$$

Une autre condition est imposée par la limite pratique d'élasticité σ_e

$$\frac{F_{MA}}{S_{0A}} < \sigma_e$$

Les dimensions des deux éprouvettes doivent réaliser un compromis entre ces conditions contradictoires et respecter certains impératifs d'usinage.

$\frac{L_{0A}}{S_{0A}} \simeq 2 \text{ à } 4 \frac{L_{0B}}{S_{0B}}$ constitue un compromis raisonnable.

La mesure des raideurs R peut être effectuée soit graphiquement sur le diagramme $(F\ D)$ (fig. IV,10) soit par l'appareil de mesure des déformations permanentes décrit au paragraphe V,1 ou par toute autre méthode.

Pour augmenter la précision, il est recommandé d'obtenir R par la moyenne de plusieurs mesures correspondant à plusieurs cycles $(F_m - F_M)$ effectués après quelques cycles de «stabilisation». L'incertitude relative sur R peut alors être de l'ordre de :

$$\frac{\delta R}{R} \simeq \frac{5}{1000}$$

ce qui entraîne une incertitude relative sur le module d'**Young** de l'ordre de :

$$\frac{\delta E}{E} \simeq \frac{1}{100}$$

Les vérifications qui ont pu être réalisées à propos des mesures de module E effectuées sur les matériaux indiqués sur le tableau de la figure II,17 permettent de situer la précision de la méthode dans la gamme $0,5$ à 1×10^{-2} .

IV,2.2. Coefficient de Poisson

IV,2.2.1. Principe de la méthode

La mesure directe de la déformation transversale (contraction de **Poisson**) lors d'une expérience en traction simple à chaud ne peut en général pas être effectuée avec la précision suffisante pour déterminer correctement la valeur du coefficient de **Poisson** ν_e . Outre les méthodes dynamiques [107], une méthode couramment utilisée consiste à déterminer ν_e indirectement par une mesure effectuée dans un cas de cisaillement pur : la torsion ; l'expérience de torsion donne le module d'élasticité tangentiel G et la théorie de l'élasticité linéaire permet d'écrire :

$$\nu_e = \frac{E}{2G} - 1$$

Pour mesurer G , on peut développer une méthode des raideurs comparées en torsion tout à fait similaire à celle utilisée pour la détermination de E .

L'expérience de torsion est définie sur les figures IV,12 et IV,13.

$$C_m \leq C < C_M \longrightarrow \frac{d\theta}{dC} = \frac{1}{\mathcal{R}}$$

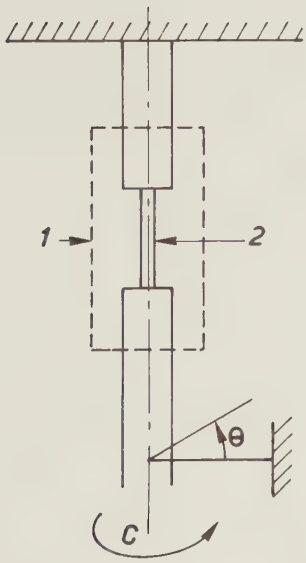


Fig. IV,12 - Principe d'un essai en torsion

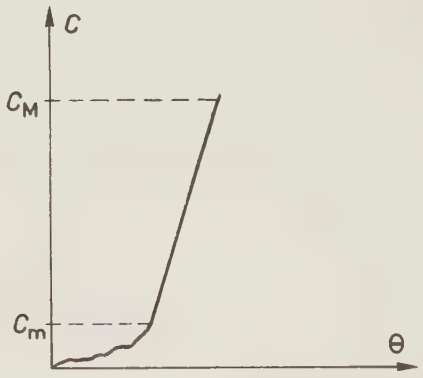


Fig. IV,13 - Courbe Moment-Rotation

La raideur de torsion $\mathcal{R}$ provient là encore :

– de la partie utile de l'éprouvette et des parties de raccordement $\mathcal{R}_e$

– des têtes de l'éprouvette et de la machine $\mathcal{R}_{tm}$

Pour deux éprouvettes A et B de têtes identiques et de parties utiles différentes :

$$\frac{1}{\mathcal{R}_A} = \frac{1}{\mathcal{R}_{eA}} + \frac{1}{\mathcal{R}_{tm}}$$

$$\frac{1}{\mathcal{R}_B} = \frac{1}{\mathcal{R}_{eB}} + \frac{1}{\mathcal{R}_{tm}}$$

soit un système de deux équations à deux inconnues $\mathcal{R}_{tm}$ et G (qui figure dans $\mathcal{R}_{eA}$ et $\mathcal{R}_{eB}$), d'où le module d'élasticité tangentiel G.

IV,2.2.2. Formules particulières

Considérons deux éprouvettes de géométrie générale définie à la figure IV,11.

La raideur en torsion de la partie utile est :

$$\mathcal{R}_{eu} = G \frac{\pi d_o^4}{32 L_o}$$

La raideur des parties de raccordement est :

$$\mathcal{R}_{er} = \frac{3\pi G}{32\left[\frac{1}{d_o^3} - \frac{1}{d_1^3}\right]}$$

Pour les deux éprouvettes A et B :

$$A \begin{cases} d_{oA} \\ L_{oA} \\ d_1 \end{cases} \qquad B \begin{cases} d_{oB} \\ L_{oB} \\ d_1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\mathcal{R}_A} = \frac{32 L_{oA}}{G\pi d_{oA}^4} + \frac{32\left[\frac{1}{d_{oA}^3} - \frac{1}{d_1^3}\right]}{3\pi G} + \frac{1}{\mathcal{R}_{tm}}$$

$$\frac{1}{\mathcal{R}_B} = \frac{32 L_{oB}}{G\pi d_{oB}^4} + \frac{32\left[\frac{1}{d_{oB}^3} - \frac{1}{d_1^3}\right]}{3\pi G} + \frac{1}{\mathcal{R}_{tm}}$$

d'où

$$G = \frac{32}{\pi} \frac{\frac{L_{oA}}{d_{oA}^4} - \frac{L_{oB}}{d_{oB}^4} + \frac{1}{3d_{oA}^3} - \frac{1}{3d_{oB}^3}}{\frac{1}{\mathcal{R}_A} - \frac{1}{\mathcal{R}_B}}$$

et

$$\boxed{\nu_e = \frac{\pi}{64} \frac{E\left[\frac{1}{\mathcal{R}_A} - \frac{1}{\mathcal{R}_B}\right]}{\frac{L_{oA}}{d_{oA}^4} - \frac{L_{oB}}{d_{oB}^4} + \frac{1}{3d_{oA}^3} - \frac{1}{3d_{oB}^3}} - 1}$$

IV,2.2.3. Procédure, résultats

Les recommandations faites à propos de la détermination de E pour les essais en traction simple sont valables également pour les essais en torsion.

$$C_{MA} \neq C_{MB}$$

$$\mathcal{R}_A \ll \mathcal{R}_B \longrightarrow \frac{L_{oA}}{d_{oA}^4} \gg \frac{L_{oB}}{d_{oB}^4}$$

$$\frac{C_{MA}}{\frac{\pi d_{oA}^3}{16}} < \frac{\sigma_e}{2}$$

Le compromis de dimensionnement de l'éprouvette peut s'exprimer par :

$$\frac{L_{oA}}{d_{oA}^4} \simeq 2 \text{ à } 4 \frac{L_{oB}}{d_{oB}^4}$$

La précision dans la détermination de ν_e ne peut être que plus faible que celle obtenue pour E, ce qui est confirmé par les quelques expériences réalisées.

$$\frac{\delta \nu_e}{\nu_e} \simeq 1 \text{ à } 2.10^{-2}$$

IV,3. Procédure pratique d'obtention des caractéristiques visco-plastiques isothermes

Le caractère fortement non linéaire des phénomènes visco-plastiques entraîne une grande sensibilité des calculs à de petites variations des grandeurs caractéristiques du matériau. Ces dernières doivent donc être déterminées avec une grande précision ce qui est souvent difficile car ce même caractère fortement non linéaire est générateur d'une grande dispersion dans les résultats d'essais. La pratique nous a permis de définir des procédures qui réalisent des compromis entre la précision la plus grande possible et un nombre d'essais le plus faible possible.

Le but est de définir analytiquement et numériquement la fonction f_v (voir chapitre II) pour une température donnée et dans son domaine de validité

$$\sigma_v = f_v(\epsilon_{vp}, \dot{\epsilon}_{vp})$$

Les paramètres d'état σ_v, ϵ_{vp}, $\dot{\epsilon}_{vp}$ sont reliés aux paramètres mesurés σ, ϵ par : (voir paragraphe II,2.1.1)

$$\sigma_v \neq \sigma \left[1 + \epsilon\right]$$

$$\epsilon_{vp} = \epsilon_v - \frac{\sigma_v}{E_v} = \text{Log}(1+\epsilon) - \frac{\sigma_v}{E_v}$$

$$\dot{\epsilon}_{vp} = \frac{d\epsilon_{vp}}{dt}$$

On suppose que le module d'élasticité E_v est connu par une mesure préalable (voir paragraphe IV,2.1). Dans la procédure adoptée on a cherché à minimiser le volume des calculs de dépouillement, ce qui explique que la valeur exacte de certaines fonctions soit obtenue, non pas directement, mais à l'aide de calculs correctifs.

IV,3.1. Méthode rapide approchée (l'essai d'écrouissage-relaxation)

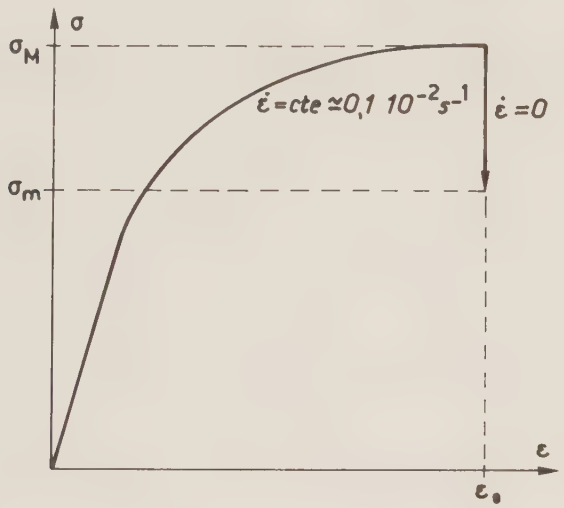
Lorsqu'un ordre de grandeur des caractéristiques peut suffire, on peut se borner aux caractéristiques apparentes :

$$\sigma = E\,\psi_{(\epsilon_p)}\;\varphi_{(\dot{\epsilon}_p)}$$

ou

$$\sigma = K\,\epsilon_p^{\frac{1}{m}}\;\dot{\epsilon}_p^{\frac{1}{n}}$$

et il est possible de les déterminer par une seule expérience dite «d'écrouissage-relaxation». Cet essai consiste en un essai d'écrouissage effectué à vitesse assez élevée, suivi d'un essai de relaxation (fig. IV,14).



Par un calcul de dépouillement, ou directement (voir paragraphe IV,1), on obtient à chaque instant :

$$\epsilon_p = \epsilon - \frac{\sigma}{E}$$

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E}$$

◀ *Fig. IV,14 - Essai d'écrouissage-relaxation*

Il est commode de représenter cet essai :

- dans le plan (Log σ, Log ϵ_p) pour la partie écrouissage (fig. IV,15)
- dans le plan (Log σ, Log $\dot{\epsilon}_p$) pour la partie relaxation (fig. IV,16)

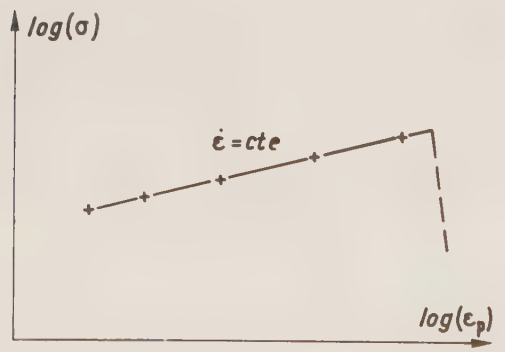


Fig. IV,15 - Ecrouissage

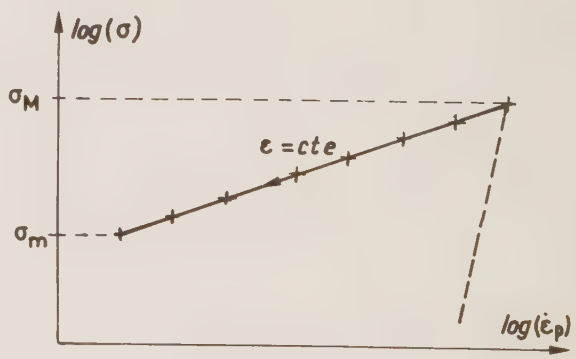


Fig. IV,16 - Relaxation

Si l'on fait les approximations suivantes :

- Ecrouissage → $\frac{\dot{\sigma}}{E} \ll \dot{\epsilon}$ ⟶ $\dot{\epsilon}_p \;\#\; \dot{\epsilon} = cte$

- Relaxation → $\dot{\epsilon} \equiv 0$

$$\frac{\sigma_M - \sigma_m}{E} \ll \epsilon_p \longrightarrow \epsilon_p \;\#\; cte$$

la courbe d'écrouissage caractérise :

$$\sigma \ (\epsilon_p \ , \dot{\epsilon}_p = cte)$$

la courbe de relaxation caractérise :

$$\sigma \ (\dot{\epsilon}_p \ , \epsilon_p = cte)$$

et l'ensemble suffit à définir numériquement la loi de visco-plasticité.

La fonction d'écrouissage $\psi_{(\epsilon_p)}$ (normée à 1 pour $\epsilon_p = \epsilon_0 - \frac{\sigma_M}{E}$) vaut simplement :

$$\psi(\epsilon_p) \# \frac{\sigma(\epsilon_p \ , \dot{\epsilon} = cte)}{\sigma_M}$$

la fonction de viscosité $\varphi(\dot{\epsilon}_p)$ s'exprime par :

$$\varphi(\dot{\epsilon}_p) \# \frac{1}{E} \ \sigma(\dot{\epsilon}_p \ , \epsilon = cte)$$

Si ces fonctions peuvent être approximées par des droites dans les plans (Log σ, Log ϵ_p), (Log σ, Log $\dot{\epsilon}_p$)

$$m \# \frac{d(\text{Log } \epsilon_p)}{d(\text{Log } \sigma)} \quad \text{(écrouissage)}$$

$$n \# \frac{d(\text{Log } \dot{\epsilon}_p)}{d(\text{Log } \sigma)} \quad \text{(relaxation)}$$

K sera défini par la moyenne de i_M points de dépouillement ($i_M \simeq 10$)

$$K \# \frac{1}{i_M} \sum_{i=1}^{i_M} \frac{\sigma(\epsilon_{pi} \ , \dot{\epsilon}_{pi})}{\epsilon_{pi}^{\frac{1}{m}} . \dot{\epsilon}_{pi}^{\frac{1}{n}}}$$

Les figures IV,17 et IV,18 montrent un exemple d'application.

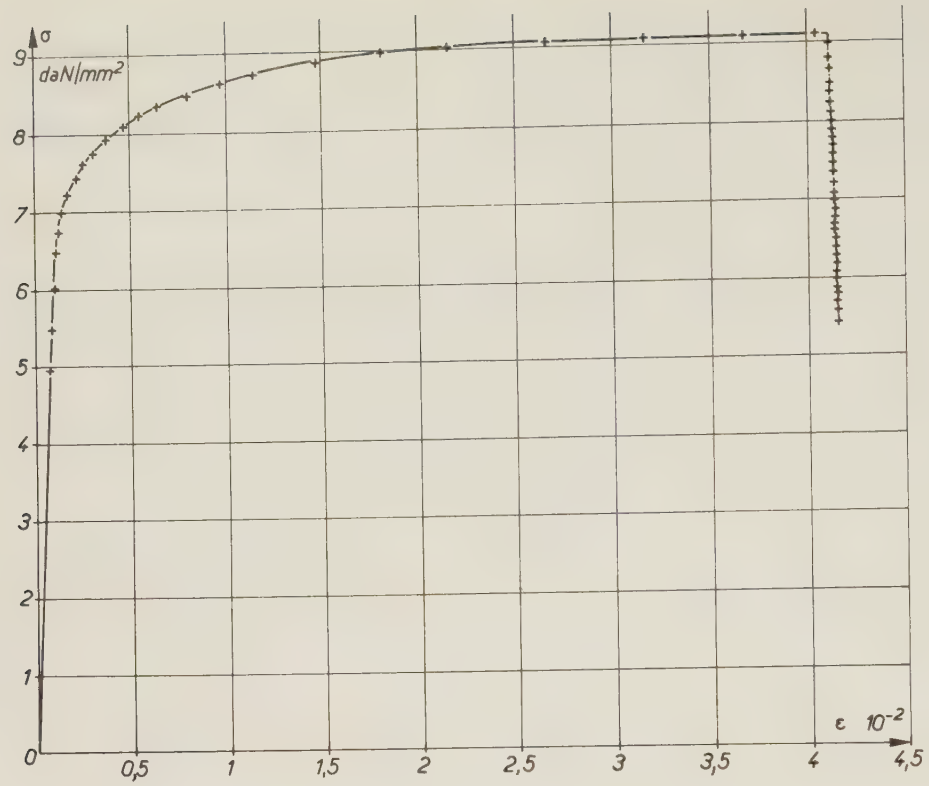
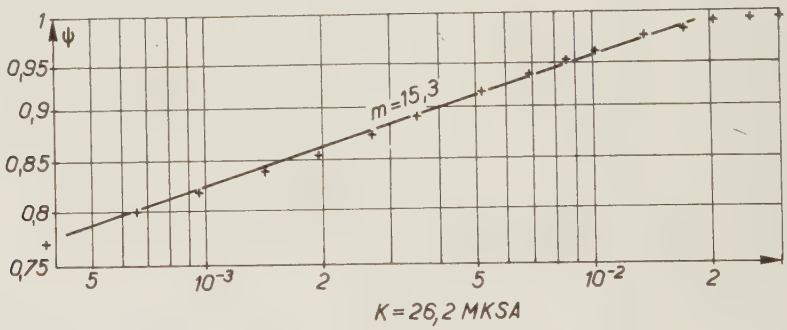


Fig. IV,17 - Essai d'écrouissage-relaxation (vitesse d'écrouissage $\dot{\epsilon} = 0{,}333\ 10^{-4}\ s^{-1}$)

- Duralumin AU4G recuit
- Température 208,5° C



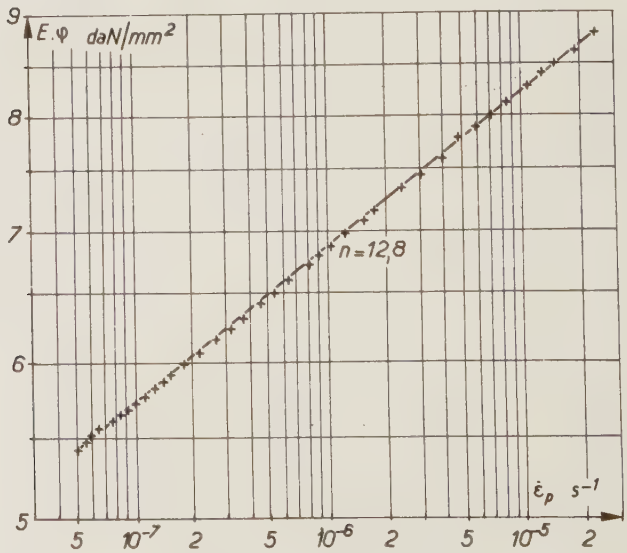


Fig. IV,18 - Caractéristiques d'écrouissage et de viscosité déterminées par un essai d'écrouissage-relaxation

- Duralumin AU4G recuit
- Température 208,5° C

IV,3.2. Caractéristique précise de viscosité

Nous cherchons à caractériser :

$$\sigma_v = f_v (\dot{\epsilon}_{vp} , \epsilon_{vp} = cte)$$

pour éventuellement plusieurs valeurs de la constante. L'essai de relaxation multiple est particulièrement bien adapté à ce problème (voir paragraphe II,3.1.2).

Après calculs de dépouillement, les résultats de l'essai peuvent être représentés dans le plan (Log σ_v, Log $\dot{\epsilon}_{vp}$) (fig. IV,19).

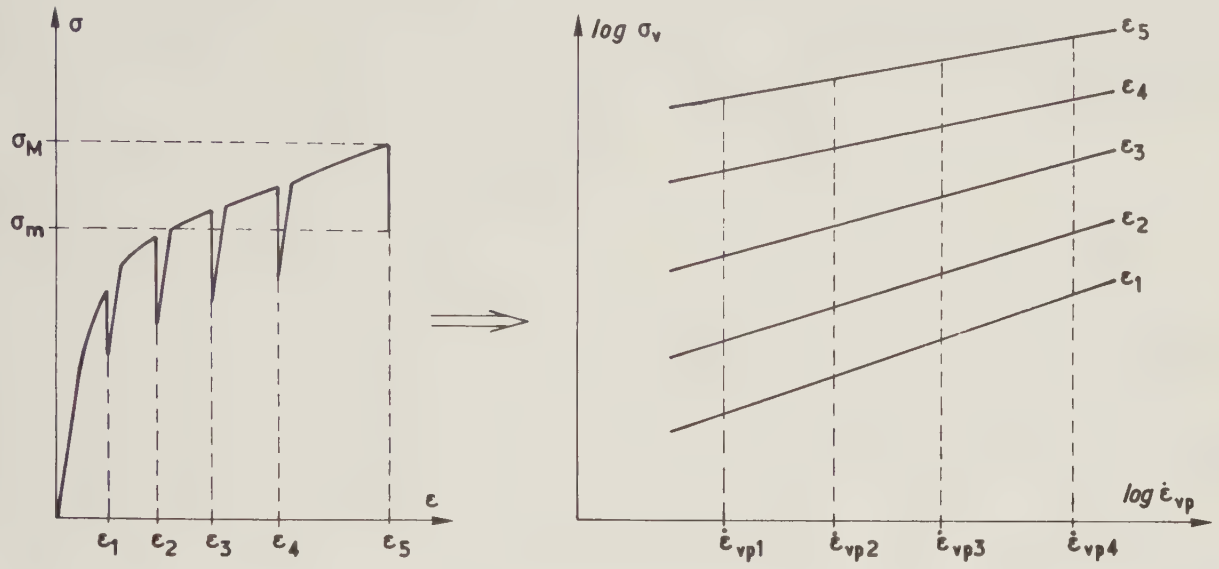


Fig. IV,19 - Résultats d'un essai de relaxation multiple

Les différentes courbes représentatives de $\sigma_v (\dot{\epsilon}_{vp})$ ne correspondent pas à des déformations viscoplastique constantes mais elles en diffèrent peu puisque pour chacune d'elles :

$$\epsilon - \frac{\sigma_M}{E} \leq \epsilon_p \leq \epsilon - \frac{\sigma_m}{E}$$

avec :

$$\frac{\sigma_M - \sigma_m}{E} < \epsilon$$

Ceci autorise la correction suivante :

On porte dans le plan (Log σ_v , Log ϵ_{vp}) les points tirés du deuxième graphique de la figure IV,19 et correspondant à quelques valeurs de $\dot{\epsilon}_{vp}$ (fig. IV,20).

Par interpolation et éventuellement par extrapolation, il est facile d'obtenir les valeurs de la contrainte σ_v correspondant à des valeurs constantes de ϵ_{vp} et de tracer ainsi dans le plan (Log σ_v , Log $\dot{\epsilon}_{vp}$)

$$\sigma_v (\dot{\epsilon}_{vp} , \epsilon_{vp} = cte)$$

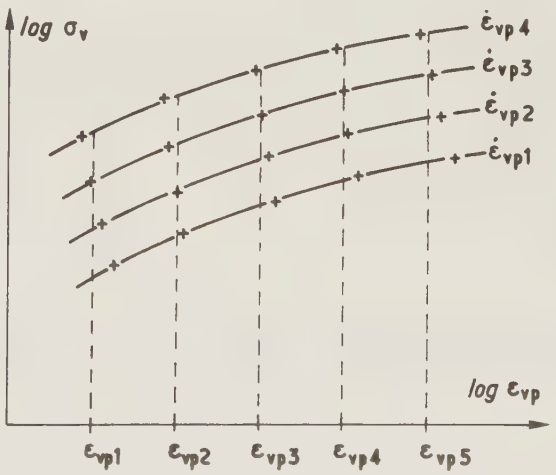


Fig. IV,20 - Courbes de correction en ϵ_{vp}

pour autant de valeurs de la constante que l'on désire (il est toutefois recommandé de se limiter aux valeurs voisines de celles qui correspondent aux paliers de relaxation réalisés) (fig. IV,21).

Dans les cas pratiques, cette correction joue sur des différences relatives en contrainte de l'ordre de 1 %.

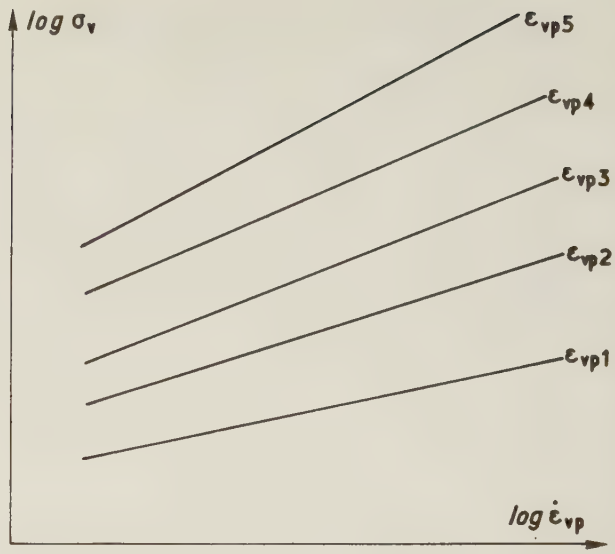


Fig. IV,21 - Caractéristique de viscosité

IV,3.3. Caractéristique précise d'écrouissage

Avec la transposition des paramètres $\dot{\epsilon}_{vp} \rightleftarrows \epsilon_{vp}$ le même principe peut être appliqué pour caractériser :

$$\sigma_v = f_v (\epsilon_{vp} , \dot{\epsilon}_{vp} = cte)$$

Là ce sont les essais d'écrouissage les mieux adaptés (fig. IV,22).

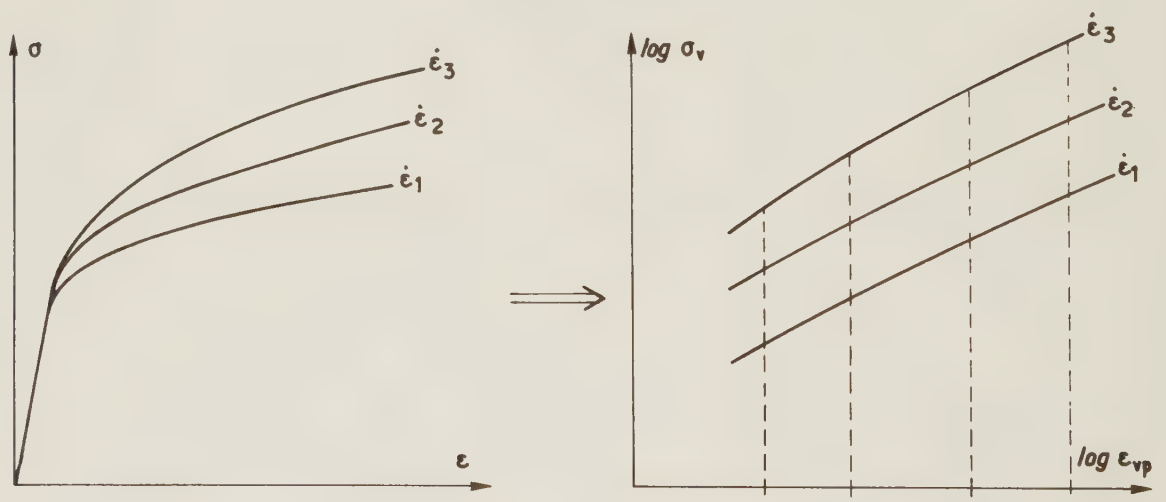


Fig. IV,22 - Résultats d'essais d'écrouissage

Les différentes courbes représentatives de $\sigma_v (\epsilon_{vp} , \dot{\epsilon} = cte)$ ne correspondent pas à des vitesses de déformation visco-plastique constantes mais elles en diffèrent peu dès que :

$$\epsilon_p > \frac{\sigma}{E}$$

d'où la correction :

– Tracé dans le plan (Log σ_v , Log $\dot{\epsilon}_{vp}$) des points représentatifs des essais d'écrouissage pour quelques valeurs de ϵ_{vp} (fig. IV,23).

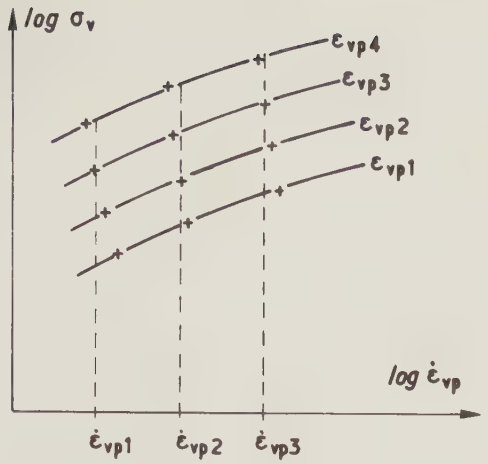


Fig. IV,23 - Courbe de correction en $\dot{\epsilon}_{vp}$ ▶

– Par interpolation et éventuellement par extrapolation, obtention de :

$$\sigma_v \ (\epsilon_{vp} , \dot{\epsilon}_{vp} = cte \ )$$

et tracé des courbes caractéristiques dans le plan (Log σ_v , Log ϵ_{vp}) (fig. IV,24).

Là encore, la correction porte sur des différences relatives en contrainte de l'ordre de 1 %.

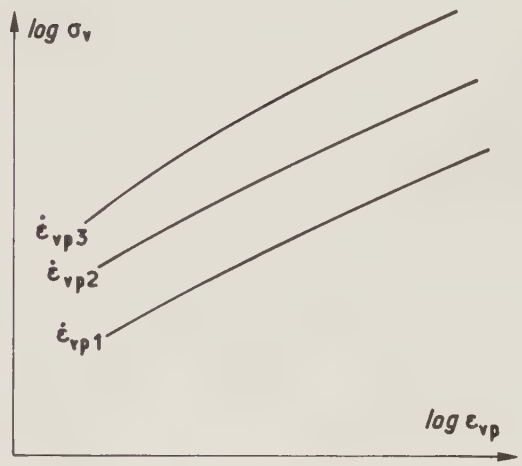


Fig. IV,24 - Caractéristique d'écrouissage ▶

IV,3.4. Détermination des fonctions et coefficients caractéristiques

Les courbes des figures IV,21 et IV,24 caractérisent complètement, par valeurs discrètes, le comportement visco-plastique isotherme intrinsèque d'un matériau dans le cadre de la validité de la loi :

$$\sigma_v = f_v \ (\epsilon_{vp} , \dot{\epsilon}_{vp})$$

Comme il a été dit au paragraphe II,2.1.1, la meilleure façon de se servir de ces résultats comme données dans un calcul de structure sur ordinateur serait sans doute de les introduire sous forme d'un tableau de nombres à 3 dimensions indépendamment de toute représentation analytique. Cette méthode qui n'a pas encore été utilisée poserait sans doute des problèmes ardus d'interpolation, voire d'extrapolation.

Les deux formes qui ont été exploitées sont :

– la forme produit de deux fonctions définies par valeurs numériques

$$\sigma_v = E_v \ \psi_v (\epsilon_{vp}) \ \varphi_v (\dot{\epsilon}_{vp})$$

– la forme analytique en fonctions puissances dont les coeffecients peuvent être éventuellement définis, par morceaux, en fonction de ϵ_{vp}

$$\sigma_v = K_v \ \epsilon_{vp}^{\frac{1}{m_v}} \ \dot{\epsilon}_{vp}^{\frac{1}{n_v}}$$

Détermination de ψ_v et φ_v

Si les courbes de la figure IV,24 sont affines et si l'on norme la fonction ψ à 1 pour une valeur conventionnelle assez grande de ϵ_{vp} : ϵ_{vpN} ($\epsilon_{vpN} \simeq 5\%$) , on obtiendra ψ_v par moyenne de i_{M1} courbes d'écrouissage :

$$\psi_v(\epsilon_{vp}) = \frac{1}{i_{M1}} \sum_{i=1}^{i=i_{M1}} \frac{\sigma_{vi}(\epsilon_{vp})}{\sigma_{vi}(\epsilon_{vpN})}$$

De même i_{M2} courbes affines de la figure IV,21 définiront :

$$\varphi_v(\dot{\epsilon}_{vp}) = \frac{1}{i_{M2}} \sum_{i=1}^{i=i_{M2}} \frac{\sigma_{vi}(\dot{\epsilon}_{vp})}{E\psi(\epsilon_{vpi})}$$

Détermination de m_v, n_v et K_v

Si les courbes des figures IV,24 et IV,21 peuvent être approximées par des droites, dans chaque morceau $\epsilon_{vpj} < \epsilon_{vp} < \epsilon_{vpj+1}$ du domaine total de déformation visco-plastique, on calculera les moyennes

$m_v = \frac{1}{q_1} \sum_{i=1}^{q_1} \frac{d(\text{Log } \epsilon_{vpi})}{d(\text{Log } \sigma_{vi})}$	pour les q_1 courbes du plan ($\text{Log } \sigma_v$, $\text{Log } \epsilon_{vp}$) contenues dans le morceau choisi.
$n_v = \frac{1}{q_2} \sum_{i=1}^{q_2} \frac{d(\text{Log } \dot{\epsilon}_{vpi})}{d(\text{Log } \sigma_{vi})}$	pour les q_2 courbes du plan ($\text{Log } \sigma_v$, $\text{Log } \dot{\epsilon}_{vp}$) contenues dans le morceau choisi

$K_v = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{q} \frac{\sigma_v(\epsilon_{vpi}, \dot{\epsilon}_{vpi})}{\epsilon_{vpi}^{\frac{1}{m_v}} \dot{\epsilon}_{vpi}^{\frac{1}{n_v}}}$	pour q points de dépouillement

Pour diminuer la dispersion inévitable due aux matériaux et aux conditions d'essais, il est recommandé de procéder comme indiqué ci-dessous :

- 1 essai de relaxation multiple avec 5 paliers de relaxation définit :

$$\sigma_v(\dot{\epsilon}_{vp}, \epsilon_{vp} = cte)$$

- 3 essais d'écrouissage-relaxation exécutés à des vitesses très différentes
  - définissent

$$\sigma_v(\epsilon_{vp}, \dot{\epsilon}_{vp} = cte)$$

  - servent de recoupement à l'essai de relaxation multiple

- d'où l'obtention de ψ_v , φ_v ou bien m_v, n_v, K_v
- En fait, les matériaux n'obéissent jamais exactement au modèle proposé et il y a lieu de vérifier et, éventuellement, de corriger les valeurs obtenues sur des essais d'un type différent : les essais de fluage par paliers. 5 essais identiques de fluage à 3 paliers successifs de contraintes peuvent être réalisés. Ils permettent de chiffrer la dispersion et peuvent être comparés au résultat du calcul correspondant effectué avec la loi déterminée par les essais de relaxation multiple et d'écrouissage.
- Si les résultats de ce calcul diffèrent notablement des résultats expérimentaux, il y a lieu de procéder à des «ajustements» des fonctions ou coefficients caractéristiques. Il s'agit là d'un travail important, délicat, qui relève de critères presque subjectifs et donc impossible à systématiser.

Quelques résultats correspondant à différents matériaux, à différentes températures, sont indiqués sur le tableau de la figure II,17 du chapitre II.

En résumé, pour déterminer les caractéristiques élasto-visco-plastiques isothermes des matériaux, il faut :

- 2 essais en traction cyclique
- 2 essais en torsion cyclique

} ⟶ caractéristiques élastiques

- 1 essai de relaxation multiple
- 3 essais d'écrouissage-relaxation

} ⟶ caractéristiques visco-plastiques

- 5 essais de fluage par paliers ⟶ contrôle des résultats et mise en évidence de la dispersion.

Si l'on ne cherche qu'un ordre de grandeur des caractéristiques visco-plastiques, un seul essai d'écrouissage-relaxation (au lieu des 9 essais) pourra suffire.

Si les caractéristiques doivent être connues en fonction de la température, en général il suffira d'appliquer la procédure complète pour les deux températures extrêmes et une température intermédiaire élevée et d'appliquer la procédure rapide pour quelques autres températures intermédiaires.

Il est bien entendu que les nombres d'essais indiqués ne sont pas impératifs et qu'ils ne constituent qu'un ordre de grandeur qui doit être adapté à la difficulté de chaque cas particulier.

Ces caractéristiques visco-plastiques sont fondamentales pour décrire le comportement complet des matériaux. Un certain nombre d'auteurs [108] ont attiré l'attention sur le caractère beaucoup trop partiel et imprécis des caractéristiques habituellement utilisées (coefficients d'élasticité, limite d'élasticité, limite de rupture). Une loi de comportement apporte des informations beaucoup plus riches et il serait souhaitable d'introduire cette notion dans les catalogues ou normes définissant les propriétés mécaniques des matériaux. Pour tous les problèmes de calcul de résistance, il serait beaucoup plus intéressant de disposer des coefficients K, m et n par exemple, que de tableaux exprimant les contraintes qui provoquent une certaine déformation de fluage en un temps donné.

Remplacer ces données «brutes» par des données synthétisées au travers d'une loi de comportement, telle doit être la tendance moderne en matière de caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux.

IV,4. Méthode d'obtention des caractéristiques de fluage à long terme à partir d'essais de relaxation de courte durée

Le caractère semi-empirique de la forme des lois de comportement développées impose, en toute rigueur, de ne les utiliser que dans le domaine des paramètres où elles ont été établies. En particulier, il est a priori dangereux d'utiliser la fonction de viscosité à des vitesses plus faibles que celles qui ont servi à lui définir une expression analytique. Pour opérer en toute sécurité, il serait souhaitable de déterminer les caractéristiques de fluage par des expériences reproduisant le plus fidèlement possible les conditions d'utilisation de la structure à calculer, c'est-à-dire des expériences en temps réel. Cette méthode peut être utilisée pour les structures dont les durées de vie sont nettement inférieures aux temps d'étude (engins, moteurs) mais elle devient difficilement applicable, voire impensable pour les structures dont les durées de vie se chiffrent en années ou dizaines d'années (avions, constructions de génie civil). Pour ces cas, il faut donc rechercher un gain de temps par les méthodes dites «d'extrapolation».

IV,4.1. Généralités sur les méthodes d'extrapolation classiques

Le critère de dimensionnement retenu est le plus souvent une certaine valeur de la déformation visco-plastique à ne pas dépasser, au temps définissant la durée de vie. Le paramètre fondamental du problème est la vitesse de déformation visco-plastique. Le tableau de la figure IV,25 en fixe les ordres de grandeur.

Voyons quel est le principe des méthodes classiques : le but généralement recherché est de prévoir la déformation visco-plastique unidimensionnelle ϵ_p au temps fixé t^*, dans un processus de fluage à contrainte apparente constante σ^* et température constante T^*, à partir d'essais de fluage exécutés en des temps nettement inférieurs à t^*. Il est supposé que ces quatre paramètres décrivent complètement le phénomène et qu'il existe une équation d'état en fluage du type :

$$\epsilon_p = f_{ex}(\sigma, T, t)$$

Par des raisonnements basés sur des considérations de physique du solide ou sur des résultats empiriques, il est possible de grouper l'influence de plusieurs paramètres sous un seul paramètre P, soit :

$$\epsilon_p = f_1(\sigma, P_1)$$

avec $P_1 = h_1(T, t)$ ⟶ paramètre temps-température

ou $$\epsilon_p = f_2(T, P_2)$$

avec $P_2 = h_2(\sigma, t)$ ⟶ paramètre temps-contrainte

ou encore $$\epsilon_p = f_3(P_3)$$

avec $P_3 = h_3(\sigma, T, t)$ ⟶ paramètre temps-température-contrainte

Ces paramètres P sont des paramètres d'équivalence puisqu'ils permettent de simuler l'effet d'un paramètre par action sur un autre. Ce sont des paramètres d'extrapolation si l'on s'en sert pour établir les courbes maitresses $\epsilon_p(P)$ par des essais correspondant à des temps t petits et si l'on utilise ces courbes pour des temps t grands. Des travaux considérables ont été effectués pour obtenir des expressions analytiques des fonctions h dans le cas des matériaux métalliques, on en trouvera des synthèses dans les références [109, 110 et 111].

Les méthodes d'extrapolation les plus employées sont celles qui font appel à l'accélération des phénomènes par élévation de la température (paramètre de **Dorn** [36], [112], **Larson-Miller** [113], **Graham-Walles** [114] mais elles présentent un inconvénient important : les essais de base sont réalisés à une température supérieure à la température du cas d'application envisagé, et par suite de transformations physico-chimiques possibles entre les deux températures, le matériau peut être rhéologiquement différent à ces deux températures, ce qui interdit toute loi d'équivalence temps-température (h_1) «a priori».

D'une façon générale les méthodes d'extrapolation classiques sont liées uniquement aux essais de fluage, elles reposent sur des expressions analytiques empiriques et, pour la plupart d'entre elles, l'absence d'un support théorique oblige à des vérifications dans chaque cas d'application.

Un certain nombre de ces inconvénients sont évités dans une méthode, élaborée en 1968 [115], qui utilise l'essai de relaxation comme moyen de créer, en des temps courts, des états rhéologiques équivalents aux états rhéologiques correspondant à des fluages de longue durée.

TYPE DE CONSTRUCTION	DURÉE DE VIE	DÉFORMATION VISCO-PLASTIQUE TOLÉRÉE	VITESSE DE DÉFORMATION VISCO-PLASTIQUE
Engins	10 mn	$0,5.10^{-2}$	$0,8.10^{-5}$ s^{-1}
Moteurs	2000 h (2,8 mois)	$0,5.10^{-2}$	$0,7.10^{-9}$ s^{-1}
Avions civils	20 000 h (2,3 ans)	$0,2.10^{-2}$	3.10^{-11} s^{-1} (ou 0,1 mm/100 mm par an)
Constructions mécaniques	10 ans	$0,5.10^{-2}$	$1,6.10^{-11}$ s^{-1}
Génie civil	100 ans	$0,5.10^{-2}$	$1,6.10^{-12}$ s^{-1}

Fig. IV,25 - Tableau des durées de vie des structures industrielles

IV,4.2. Obtention directe des courbes de fluage à partir des résultats d'expériences de relaxation

IV,4.2.1. Hypothèses

L'état rhéologique unidimensionnel isotherme du matériau ne dépend que des paramètres :

- contrainte vraie σ_v
- déformation élastique ϵ_{ve}
- déformation visco-plastique ϵ_{vp}
- vitesse de déformation visco-plastique $\dot{\epsilon}_{vp}$

Le matériau est stable, sa loi de comportement est celle qui a été établie au paragraphe II,2.1.1 :

$$\epsilon_v = \epsilon_{ve} + \epsilon_{vp}$$

$$\sigma_v = E_v \epsilon_{ve}$$

$$\sigma_v = f_v(\epsilon_{vp}, \dot{\epsilon}_{vp})$$

Dans le développement de la méthode, la fonction f_v ne sera pas particularisée, seule son existence est postulée.

IV,4.2.2. Principe de la méthode

On cherche à tracer la courbe représentative de la déformation en fonction du temps $\epsilon(t)$, constituant la réponse du matériau à l'action d'une contrainte constante $\sigma = \sigma^*$ pour une température fixée T^* (courbe de fluage isotherme).

Les données sont constituées par les résultats d'un nombre ℓ d'essais de relaxation effectués, sur le matériau considéré, pour des valeurs discrètes de la déformation ϵ et à la température T^*, les différentes courbes comprenant la valeur σ^* (fig. IV,26).

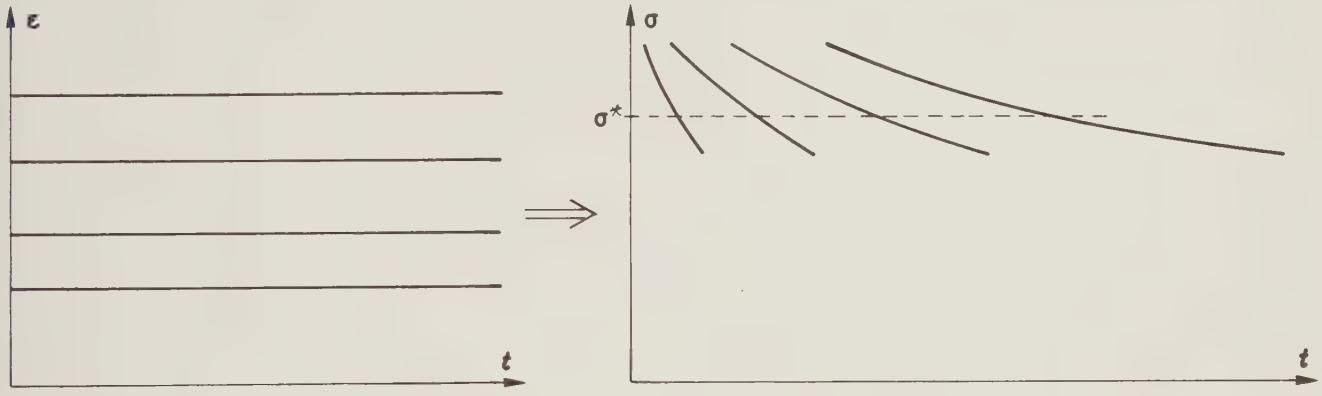


Fig. IV,26 - Essais de relaxation

Considérons les valeurs des paramètres d'état correspondant, sur chacune des courbes $\sigma(t)$, à $\sigma = \sigma^*$; on a :

$$\sigma_v = \sigma^* \left[1 + \epsilon \right]$$

$$\dot{\sigma}_v \neq \frac{d\sigma}{dt} \quad (\sigma = \sigma^*) \qquad \text{car} \quad \epsilon_v \neq \text{cte} \rightarrow \dot{\epsilon}_v \neq 0$$

$$\epsilon_{vp} = \epsilon_v - \frac{\sigma_v}{E_v} = \text{Log}\,(1+\epsilon) - \frac{\sigma_v}{E_v}$$

$$\dot{\epsilon}_{vp} \neq - \frac{\dot{\sigma}_v}{E_v}$$

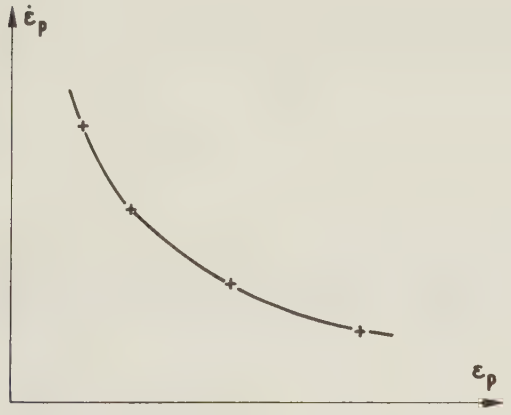
D'après les hypothèses énoncées, l'état rhéologique visco-plastique du matériau est complètement défini par la connaissance de la valeur des paramètres σ_v , ϵ_{vp} , $\dot{\epsilon}_{vp}$, indépendamment du cas de sollicitation. Les ℓ points considérés qui correspondent à :

$$\sigma = \sigma^*$$

sont donc représentatifs d'un cas de fluage à contrainte apparente constante. On peut alors tracer la trajectoire de ce processus de fluage dans le plan de phase ϵ_{vp} , $\dot{\epsilon}_{vp}$ ou mieux, dans le plan $(\epsilon_p , \dot{\epsilon}_p)$ (fig. IV,27) qui met en jeu les paramètres ϵ_p et $\dot{\epsilon}_p$, déterminés par la connaissance de σ_v, ϵ_{vp}, $\dot{\epsilon}_{vp}$, et reliés simplement aux données et résultats des essais de relaxation par :

$$\epsilon_p = \epsilon - \frac{\sigma^*}{E}$$

$$\dot{\epsilon}_p = - \frac{\dot{\sigma}}{E} \quad (\sigma = \sigma^*)$$



◀ *Fig. IV,27 - Trajectoire de fluage dans le plan de phase*

La variation de la déformation visco-plastique s'obtient facilement de la manière suivante :
La trajectoire du plan de phase définit par valeurs numériques la fonction g :

$$\dot{\epsilon}_p = g(\epsilon_p)$$

et, de la résolution de cette équation différentielle à variables séparées, on tire le temps avec la condition initiale

$$t = 0 \longrightarrow \epsilon_p = 0$$

$$\frac{d\epsilon_p}{dt} = g(\epsilon_p) \longrightarrow t = \int_0^{\epsilon_p} \frac{1}{g(x)} \, dx$$

La courbe représentative de $\frac{1}{\dot{\epsilon}}$ en fonction de ϵ_p (figure IV,28) est définie par ℓ points et il se pose un problème au voisinage de l'origine : quelle est la valeur de $\dot{\epsilon}_p$ pour $\epsilon_p = 0^+$?

Comme ce problème du fluage naissant n'est pas résolu, on procèdera de la manière suivante :

Soit ϵ_{p0} la plus petite valeur de ϵ_p décelable par les moyens d'essais disponibles, et soit t_0 le temps correspondant à ϵ_{p0} dans le processus de fluage sous contrainte σ^*.

– On calculera l'intégrale :

$$t_I = \int_{\epsilon_{p0}}^{\epsilon_p} \frac{1}{g(x)} \, dx$$

par toute méthode graphique ou numérique.

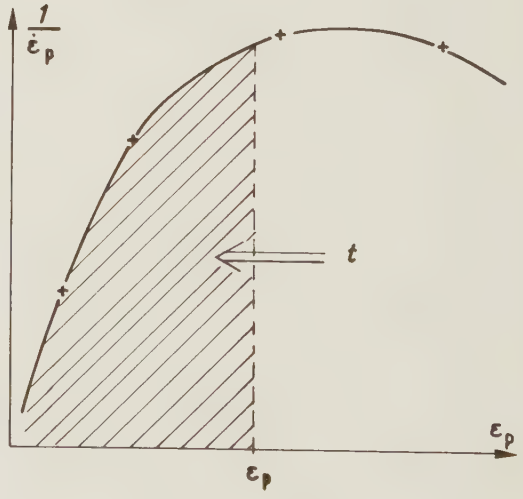


Fig. IV,28 - Trajectoire de fluage

– Le temps t_0 (temps court) sera soit déterminé expérimentalement par un essai de fluage spécial, soit éventuellement négligé, et alors :

$$t(\epsilon_p) = t_0(\epsilon_{p_0}) + t_1(\epsilon_{p_0}, \epsilon_p)$$

$t(\epsilon_p)$ étant connu par valeurs numériques, on peut tracer la courbe représentative de $\epsilon_p(t)$ ou, si l'on désire, celle de $\epsilon(t)$ (fig. IV,29)

$$\epsilon(t) = \epsilon_p(t) + \frac{\sigma^*}{E}$$

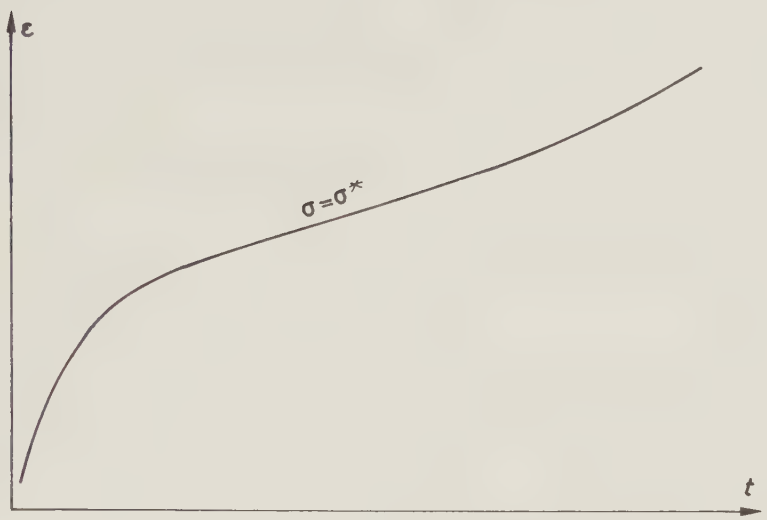


Fig. IV,29 - Courbe de fluage

La courbe représentative d'un processus de fluage à contrainte constante et température fixée peut donc être tracée à partir d'un réseau de courbes de relaxation obtenues à la même température, et sans expliciter aucune loi, ce qui constitue les deux intérêts majeurs de la méthode.

Notons qu'un réseau de courbes de relaxation permet de déterminer autant de courbes de fluage que de contraintes qu'il est possible de distinguer entre la contrainte maximale et la contrainte minimale atteintes en relaxation.

IV,4.3. Intérêt de la méthode : gain de temps

Le gain de temps à attendre de l'application de cette méthode peut être calculé dans chaque cas particulier en appliquant les formules établies au paragraphe II,3.1.1 :

Pour atteindre une déformation visco-plastique ϵ_p^* sous une contrainte σ^* le rapport des temps t_f^* et t_r^* correspondant au cas de fluage et de relaxation s'exprime par :

$$\frac{t_f^*}{t_r^*} = \frac{m}{m+n} \; \frac{\epsilon_p^{*\frac{m+n}{m}}}{\left[\frac{\sigma^*}{E}\right]^n}$$

où m et n sont les coefficients d'écrouissage et de viscosité dans la loi $\sigma = K \epsilon_p^{\frac{1}{m}} \dot{\epsilon}_p^{\frac{1}{n}}$

E est le module d' **Young**

J est la valeur de l'intégrale $\int_0^{\epsilon_p^*} \frac{x^{\frac{n}{m}}}{[\epsilon^* - x]^n} dx$ dont des représentations fonctionnelles approchées sont indiquées sur le tableau de la figure II,32.

Si l'on pose :

$$\Gamma = \frac{m}{n+m} \frac{\epsilon_p^{*\frac{n}{m}}}{\epsilon_e^{*n-1}} \frac{1}{J} \quad \text{avec} \quad \epsilon_e^* = \frac{\sigma^*}{E}$$

$$\boxed{\frac{t_f^*}{t_r^*} = \Gamma \frac{\epsilon_p^*}{\epsilon_e^*}}$$

La fonction Γ est telle qu'elle varie très peu en fonction des paramètres ϵ_e^* et ϵ_p^* tant que leurs valeurs restent dans le domaine des cas d'essais usuels :

$$0{,}1\ 10^{-2} \leq \epsilon_e^* \leq 0{,}4\ 10^{-2}$$

$$1 \leq \frac{\epsilon_p^*}{\epsilon_e^*} \leq 5$$

Ceci permet de tracer dans le plan (m , n) des courbes paramétrées en Γ et d'avoir ainsi un moyen graphique de déterminer $\frac{t_f^*}{t_r^*}$ pour tous les matériaux dans la mesure où l'on connaît m et n (fig. IV,30). Les zones hachurées correspondent aux variations de Γ avec ϵ_e^* et ϵ_p^* limités aux valeurs indiquées.

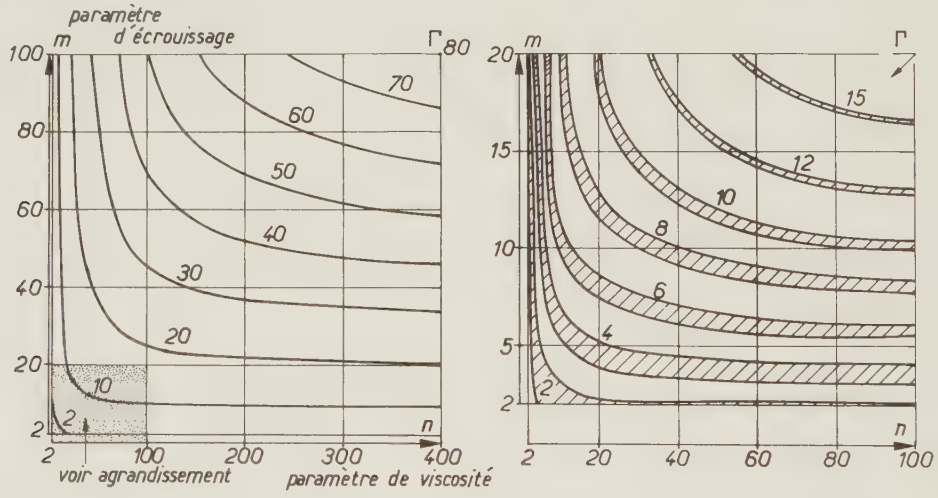


Fig. IV,30 - Gain de temps : $\frac{t^* \text{ fluage}}{t^* \text{ relaxation}} = \Gamma \times \frac{\epsilon_p^*}{\epsilon_e^*}$

Pour reconstituer une série de courbes de fluage isotherme à partir de données provenant, soit d'essais de relaxation simple, soit d'un seul essai de relaxation multiple particulièrement avantageux (voir paragraphe II,3.1.2), les formules du gain de temps permettent de choisir la procédure qui minimise le temps global d'essai t_R en fonction de la précision souhaitée et du nombre de machines disponibles.

IV,4.4. Résultats

La méthode repose essentiellement sur l'équivalence entre le phénomène de relaxation et le phénomène de fluage. Cette équivalence, c'est-à-dire, en fait, la validité de la loi de comportement proposée n'est vraisemblablement générale que pour les matériaux stables. Outre les résultats du chapitre II, un certain nombre d'études confirment l'équivalence [116-117-118] mais un important travail de vérification reste à faire.

Quelques exemples illustrent l'application de la méthode à des cas pratiques. Dans chaque série d'essais, un certain nombre d'expériences de fluage ont été réalisées ; les courbes représentatives de la déformation en fonction du temps sont comparées aux courbes de fluage résultant de calculs dont les données sont fournies par des expériences de relaxation ou de relaxation multiple exécutées, pour la plupart, sur l'appareil décrit au paragraphe V,2.

Les figures IV,31 et IV,32 montrent des vérifications de principe concernant des expériences de courte durée. L'accord théorie-expérience est bon, les différences ne provenant que du manque de précision dans le calcul de la dérivée $\frac{d\epsilon_p}{dt}$, Il est intéressant de constater que la méthode rend compte partiellement du fluage tertiaire (existence d'une loi de comportement exprimée en contrainte et déformations vraies). Dans l'exemple de la figure IV,32, les gains de temps réalisés sont de 10, 8 et 6.

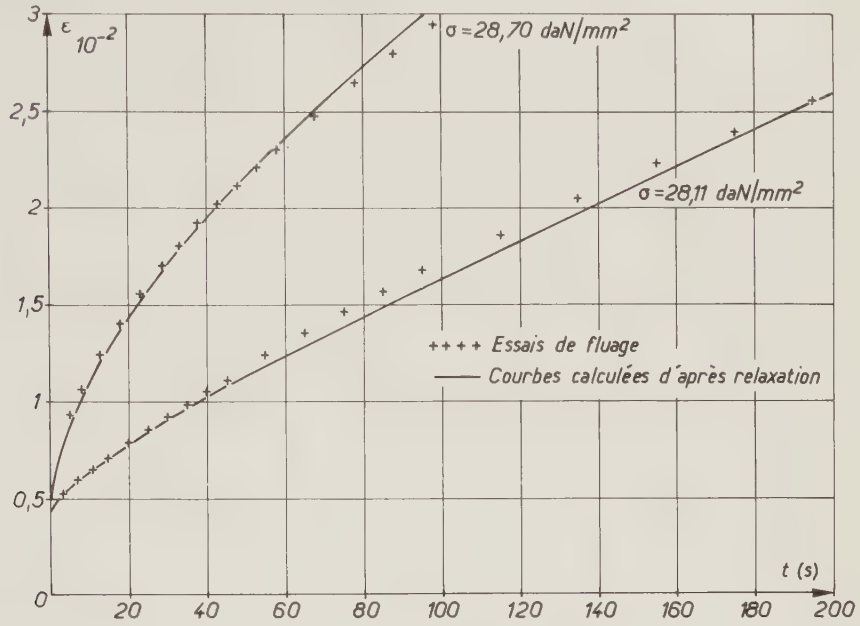


Fig. IV,31 - Courbes de fluage - Duralumin AU4G trempé vieilli - Température 200°C

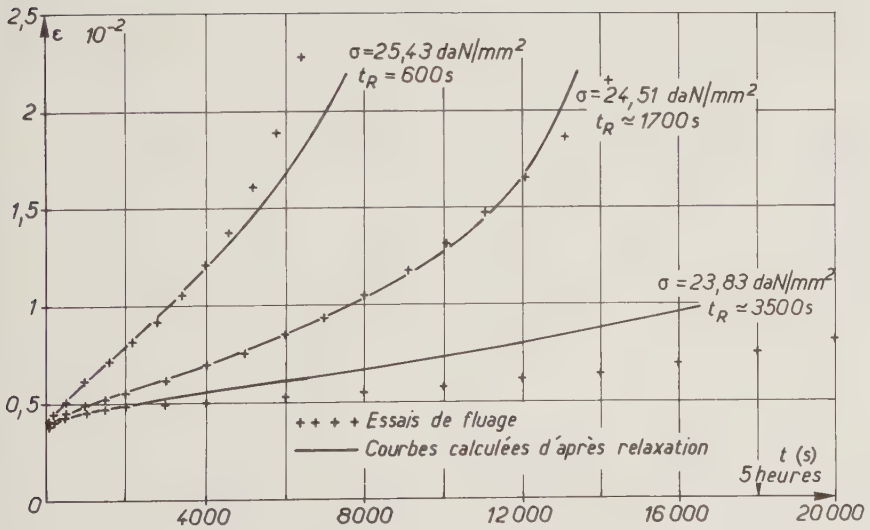


Fig. IV,32 - Courbes de fluage - Duralumin AU4G trempé vieilli - Température 200° C

La figure IV,33 montre une application concernant un fluage de deux jours où l'ordre de grandeur de la déformation de fluage est retrouvée par le calcul. Le gain de temps réalisé est de l'ordre de 60.

La figure IV,34 enfin montre une application réalisée en collaboration avec la Direction «Matériaux» de l'O.N.E.R.A. [119] où les vitesses de déformation visco-plastique atteignent $10^{-10}\,s^{-1}$ c'est-à-dire un ordre de grandeur intéressant des applications industrielles.

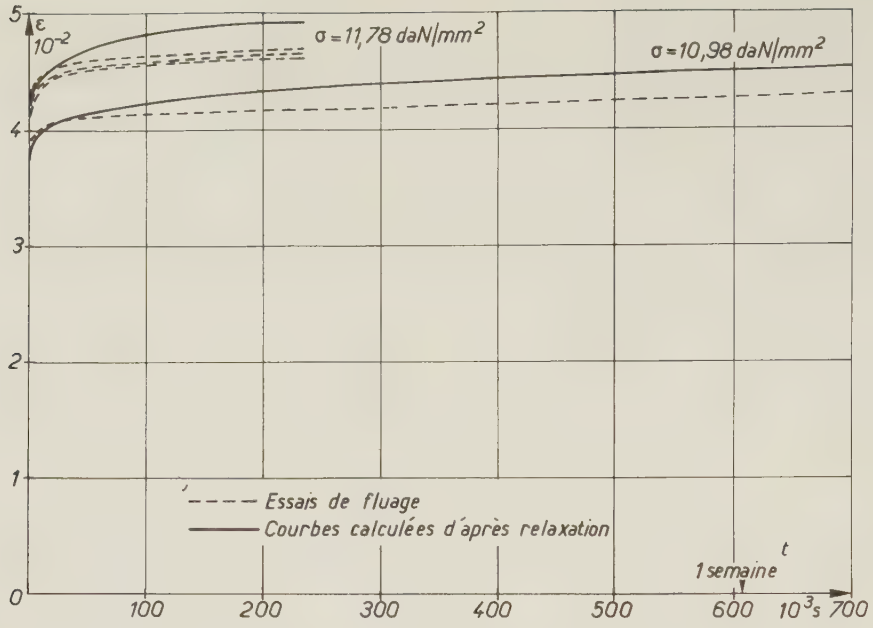


Fig. IV,33 - Courbes de fluage - Cuivre recuit - Température 22° C

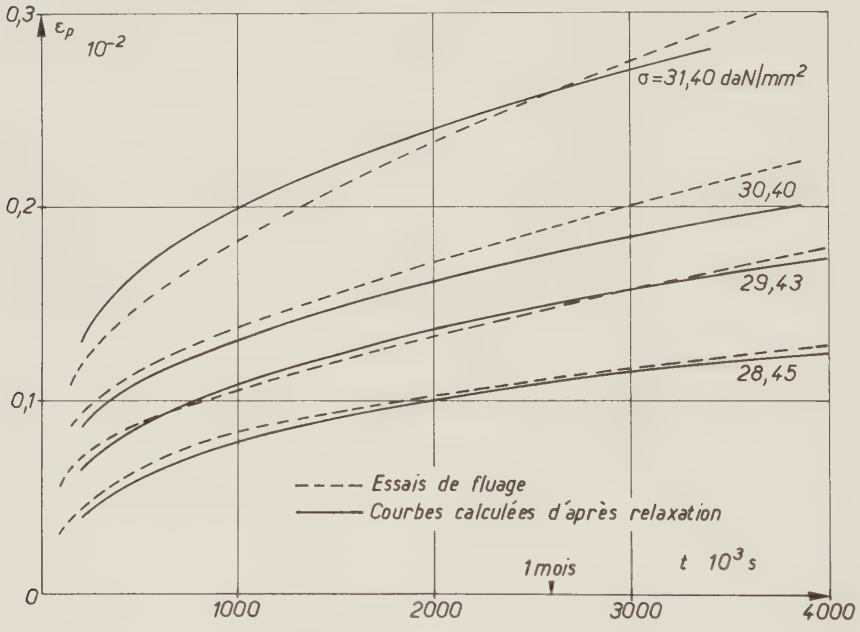


Fig. IV,34 - Courbes de fluage - Alliage AU2GN trempé vieilli
- Température 130° C

L'accord théorie-expérience, qui se situe dans une marge d'erreur de 10 %, est satisfaisant pour les applications envisagées. Pour l'ensemble du réseau de courbes, le gain de temps peut être estimé à 10.

Il est bien évident que cette méthode n'a d'intérêt pratique que pour les temps de fluage très longs, c'est-à-dire les faibles vitesses de déformation visco-plastique. L'extension de la méthode à ces très basses vitesses ($\dot{\epsilon}_p \simeq 10^{-11} s^{-1}$ → temps de fluage de l'ordre de l'année) se poursuit actuellement dans le cadre d'un contrat D.G.R.S.T. Il s'agit essentiellement de résoudre certains problèmes technologiques, liés à la mesure de la force de relaxation et de la stabilité en température, dans l'appareil à relaxation multiple décrit au paragraphe V,2. Il est également envisagé d'étudier les possibilités d'extension de la méthode au cas des matériaux non stables.

CHAPITRE V

CRÉATION DE MOYENS D'EXPÉRIMENTATION

La plupart des moyens d'essais classiques de résistance des matériaux ont été conçus pour répondre à des besoins en matière de contrôle de fabrication (sidérurgie par exemple) ou de caractérisation sommaire des matériaux (limite élastique, limite de rupture...). L'étude expérimentale des lois de comportement, telle qu'elle a été décrite au chapitre II, impose des moyens plus spécialisés que les machines dites «universelles» car il faut pouvoir analyser des évolutions dans des conditions connues avec précision. Les moyens qui ont été développés à l'O.N.E.R.A. entre 1962 et 1969 répondent à cet objectif. Ils bénéficient de certains résultats exposés au chapitre II et permettent l'application des méthodes décrites au chapitre IV.

Les techniques numériques de mesure ont été systématiquement utilisées dans les chaînes de mesures des différents moyens décrits ici. Comme il n'est financièrement pas possible d'équiper chaque machine d'une chaîne de traitement autonome, une chaîne centrale de mesure numérique et d'acquisition a été conçue pour recueillir toutes les mesures émanant de toutes les machines d'un laboratoire [120]. Cette chaîne fournit un ruban perforé qui peut être exploité sur ordinateur grâce à une chaîne de programmes de dépouillements. Un tel équipement, associé à une plate-forme d'essai (également conçue et réalisée à l'O.N.E.R.A.) destinée à recevoir les montages les plus divers, constitue certainement l'équipement de base du Laboratoire de Mécanique des Solides (fig. V,1). Une grande partie des résultats exposés aux chapitres II, III et IV a été obtenue par des techniques de mesures numériques et grâce, en particulier :

- à la possibilité de mesurer simultanément de nombreux paramètres,
- à la grande précision des mesures (3 à 5 chiffres significatifs),
- à la possibilité de traiter sur ordinateur un grand nombre d'informations pour effectuer des calculs de dépouillements, éventuellement compliqués pour tenir compte de nombreuses corrections.

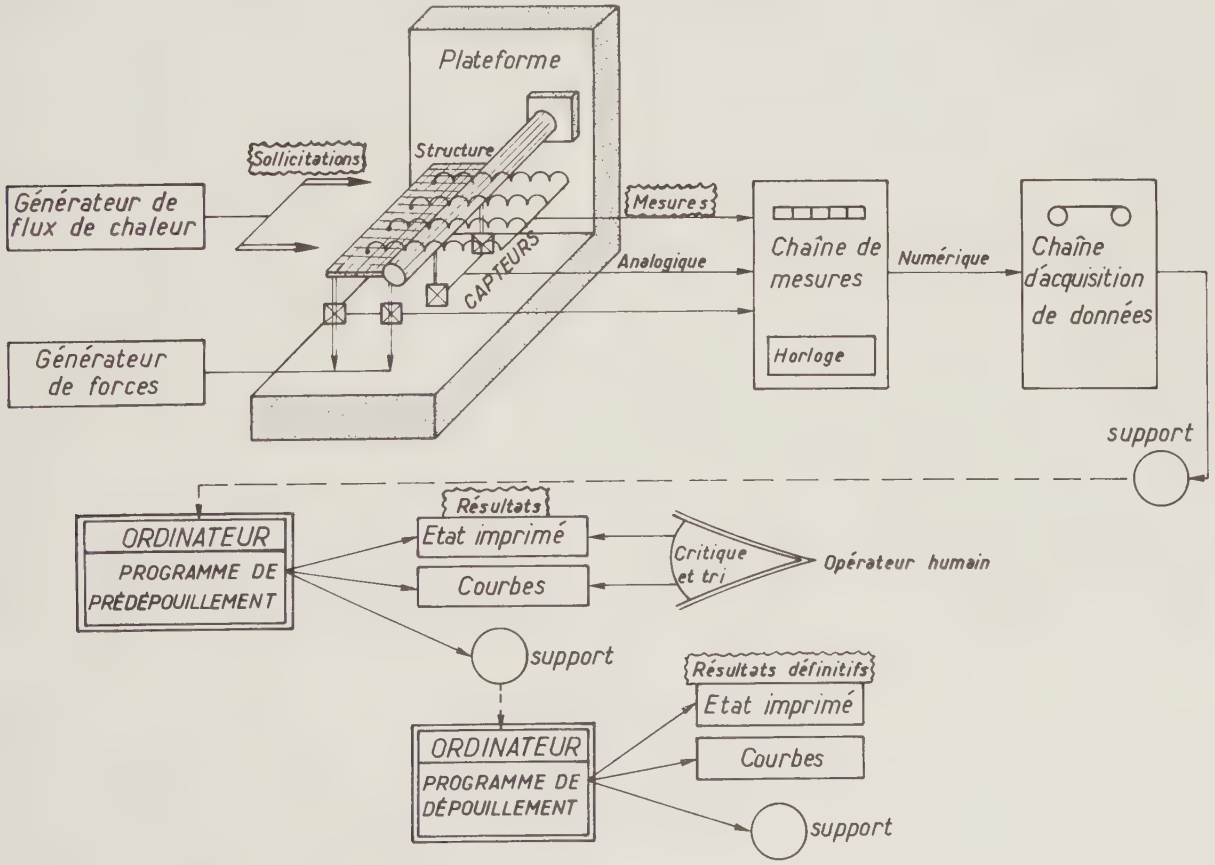


Fig. V,1 - Organisation d'essais sur maquettes et de dépouillement des résultats

V,1. Appareil de mesure directe des déformations permanentes (fig. V,2)

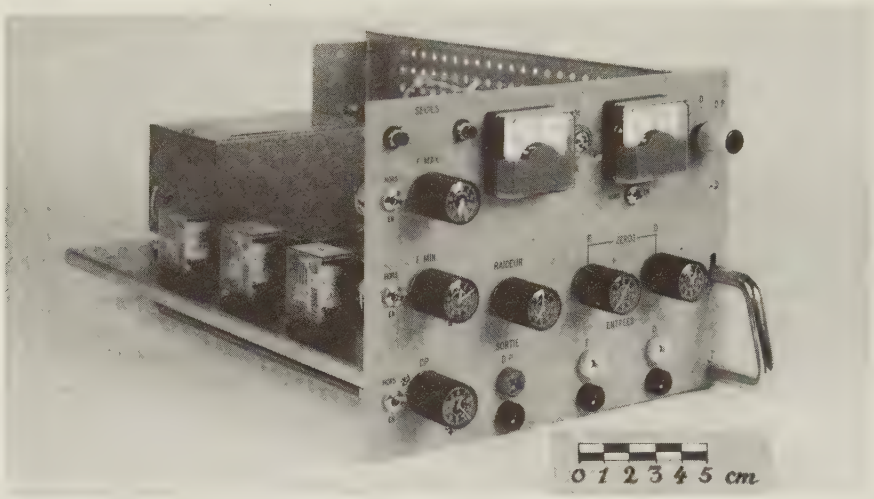


Fig. V,2 - Appareil de mesure des déformations permanentes

Un appareil électronique a été conçu et réalisé en 1969 [121] pour mettre en pratique la méthode de mesure des déformations exposée au paragraphe IV,1 et obtenir ainsi, en temps réel, la déformation non élastique de l'éprouvette dans l'essai en traction simple.

Conformément à l'étude du paragraphe IV,1.1, et avec les mêmes notations, l'appareil réalise l'opération suivante :

$$DP \equiv \Delta L_p = D - \Delta L_j - \frac{F}{R}$$

c'est-à-dire qu'il fournit un signal analogique proportionnel à la déformation visco-plastique de la partie utile de l'éprouvette dans la mesure où l'on néglige la déformation visco-plastique de ses têtes. L'appareil possède en outre d'autres fonctions intéressantes.

V,1.1. Fonctions réalisées

Lors d'un essai unidimensionnel (fig. V,3), la force sollicitatrice F de l'éprouvette est mesurée par un dynamomètre placé en série et le déplacement résultant D est mesuré par un capteur de déplacement. La courbe Force-Déplacement a, en général, l'allure indiquée sur la figure V,).

- une région OA qui représente le domaine de rattrapage des jeux des différents éléments de la machine et du système de fixation de l'éprouvette ;
- une région AB, ou zone de linéarité, qui représente la réponse élastique du matériau et de la machine ;
- une région BC qui représente la réponse non linéaire de l'éprouvette et la réponse de la machine, supposée encore élastique linéaire, à cause de son surdimensionnement.

L'appareil possède les fonctions suivantes (voir fig. V,4) :

1 - Translation des origines, c'est-à-dire mise à zéro de F et D en un point situé dans la zone de linéarité.

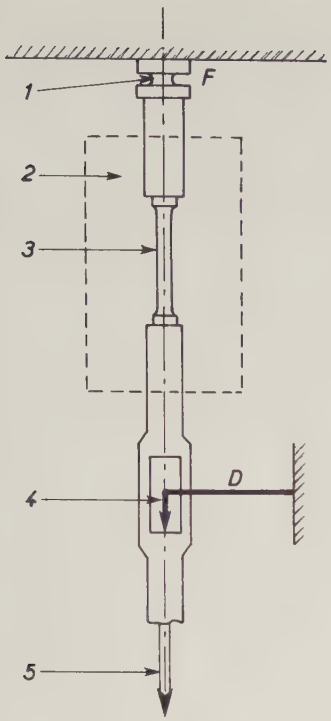
2 - Mesure de la raideur globale $R = \frac{\Delta F}{\Delta D}$ entre A et B par méthode de zéro $(\Delta D - \frac{1}{R} . \Delta F \equiv 0)$ en ajustant $\frac{1}{R}$ manuellement.

3 - Obtention analogique de la grandeur DP .

$$DP = \left[D - D_{(A)} \right] - \frac{1}{R} \left[F - F_{(A)} \right]$$

DP représente alors la partie non linéaire du déplacement global, c'est-à-dire, au coefficient d'étalonnage de D près, la déformation non élastique de l'éprouvette.

4 - Affichage de trois seuils F_{min} , F_{max} , DP^* qui, lorsqu'ils sont atteints, déclenchent des relais de commande.



◀ *Fig. V,3 - Principe d'un essai unidimensionnel*

1 - Dynamomètre
2 - Chauffage
3 - Eprouvette
4 - Capteur de déplacement
5 - Force sollicitatrice

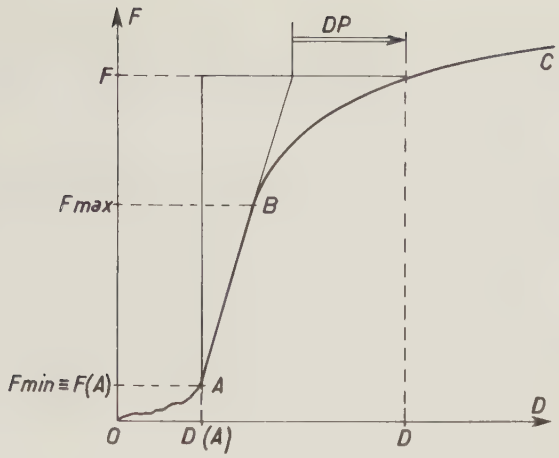


Fig. V,4 - Courbe force-déplacement

V,1.2. Caractéristiques

Les amplificateurs différentiels de gain 1 ainsi que les comparateurs de seuils sont réalisés avec des modules opérationnels. Les tensions d'entrées représentant la force F , le déplacement D et la tension de sortie représentant le déplacement plastique DP ont pour gamme ± 10 volts (fig. V,5).

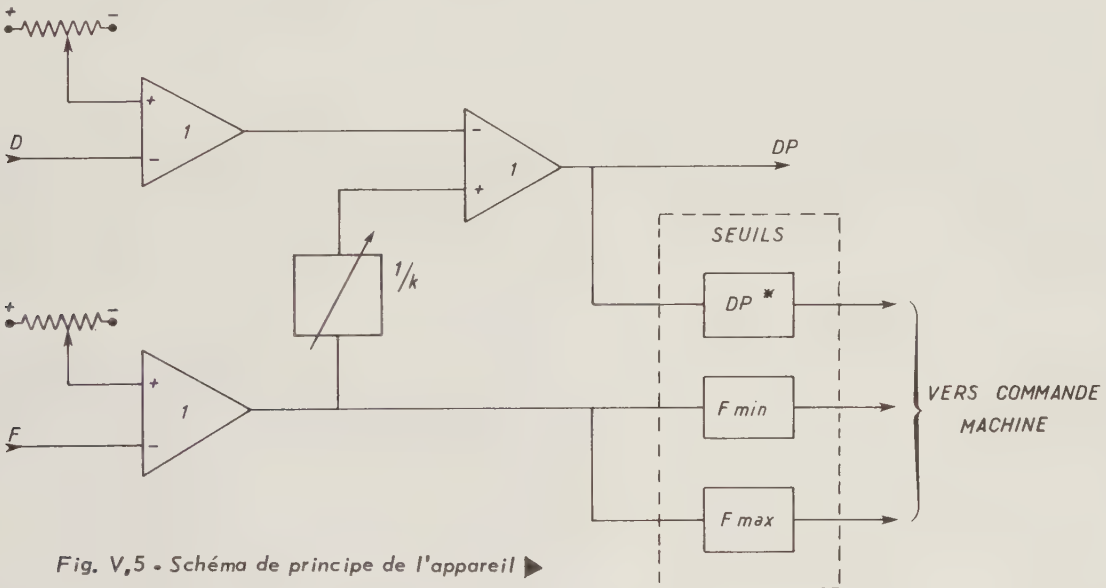


Fig. V,5 - Schéma de principe de l'appareil ▶

Le réglage du coefficient $\frac{1}{R}$ et la détermination des seuils s'effectuent à l'aide de potentiomètres multitours de linéarité indépendante 10^{-3} et permettent une lecture à 1‰ de l'échelle totale.

Performances :

- stabilité : < 1 mV en 12 heures
- erreur absolue sur le coefficient $\frac{1}{R}$: 2.10^{-3} V (Force)/V (Déplacement)

  (l'erreur relative sur R est minimale pour le conditionnement des signaux Force et Déplacement qui rend $\frac{1}{R}$ voisin de 1) ;
- erreur sur le déplacement visco-plastique < 10^{-3} de l'échelle totale du déplacement ;
- seuil minimal DP * : 10^{-3} de l'échelle totale du déplacement ;
- sortie DP basse impédance pour voltmètre ou enregistreur.

V,1.3. Applications

Les trois fonctions essentielles de l'appareil permettent les applications suivantes :

Fonction 4 (seuils)

- Commande d'appareils ou machines pour les valeurs réglables de la force F_{min} et F_{max}
- Détection d'une non linéarité caractérisée par la valeur réglable DP^*
  - Détermination systématique de la contrainte correspondant à une limite élastique conventionnelle définie par un «résidu» de déformation visco-plastique. L'appareil permet de détecter un résidu représentant 1/ 1000 de la déformation élastique.
  - Exploration automatique des surfaces limites d'élasticité sur machines d'essais multidimensionnels.

Fonction 2 (raideur)

- Mesure de la raideur de systèmes mécaniques. Après plusieurs cycles de stabilisation entre F_{min} et F_{max} la précision peut atteindre celle des capteurs de force et de déplacement utilisés.
- Mesure du module d'élasticité des matériaux par comparaison des raideurs correspondant à deux essais en traction simple exécutés sur deux éprouvettes de géométrie différente. Cette méthode est décrite au paragraphe IV,2.1.

Fonction 3 (non linéarité)

- Mesure de l'écart non linéaire de l'évolution d'une grandeur physique pouvant être considérée comme linéaire pour ses faibles valeurs. D'après quelques essais comparatifs réalisés, la précision est de l'ordre de 1‰
- Mesure directe de la déformation visco-plastique unidimensionnelle des matériaux à élasticité linéaire :

$$\epsilon_p = \frac{DP}{L_0}$$

(L_0 étant la longueur de la partie utile, de section constante, de l'éprouvette).

Outre certaines applications en mesures physiques, cet appareil constitue un accessoire simple et commode des machines d'essais pour l'étude des caractéristiques élastiques et visco-plastiques des matériaux.

V,2. Appareil à relaxation multiple (fig. V,6)

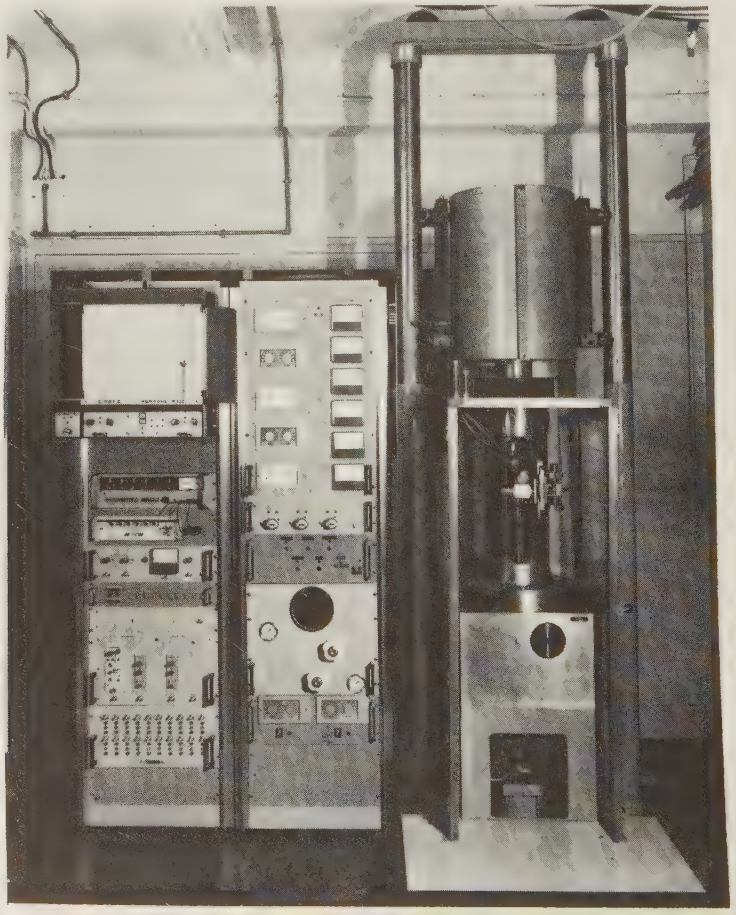


Fig. V,6 - Appareil à relaxation multiple ▶

Le très grand intérêt des essais de relaxation, exposé au paragraphe II,3.1, et les méthodes qui en découlent, exposées aux paragraphes IV,3 et IV,4, ont suscité l'étude et la réalisation d'une machine d'essai de relaxation multiple en traction simple de hautes performances.

La difficulté majeure à vaincre est la réalisation d'une déformation parfaitement constante sur l'éprouvette tout en évitant les «retours en arrière». Dans les machines classiques du commerce, un extensomètre fixé sur la partie utile de l'éprouvette commande la force sollicitatrice de l'éprouvette de façon à maintenir constante la déformation. Que cette commande soit réalisée par un dispositif mécanique simple (machines ADAMEL T.R.) ou par l'intermédiaire d'un asservissement de haute qualité [122], les seuils de détection imposent une variation de la déformation entre une valeur «maximale» et une valeur «minimale» et la relaxation est, en fait, une succession de micro-déformations à contrainte constante et de micro-retours en arrière. D'autre part, à haute température, il n'existe aucun extensomètre susceptible d'effectuer une mesure locale très précise.

L'appareil décrit ici, qui est une machine à déplacement imposé, résout ces problèmes par sa conception même.

V,2.1. Principe (fig. V,7)

L'éprouvette, du type de celle décrite au paragraphe IV,1.1, est encastrée à sa partie supérieure à dans un bâti (fig. V,7).

Sa partie inférieure est solidaire d'une butée réglable, qui peut être amenée en contact avec le bâti par l'intermédiaire d'une force F_p, imposant ainsi un déplacement D. La force sollicatatrice de l'éprouvette F est mesurée par un dynamomètre, placé directement en série avec l'éprouvette, et la condition :

$$F_p > F$$

permet de considérer qu'aux déformations du bâti près, l'éprouvette est soumise à un déplacement constant. L'absence de tout dispositif d'asservissement, déjà utilisé dans des montages simples au Laboratoire des Travaux Publics de Paris [123], évite les ennuis des machines classiques.

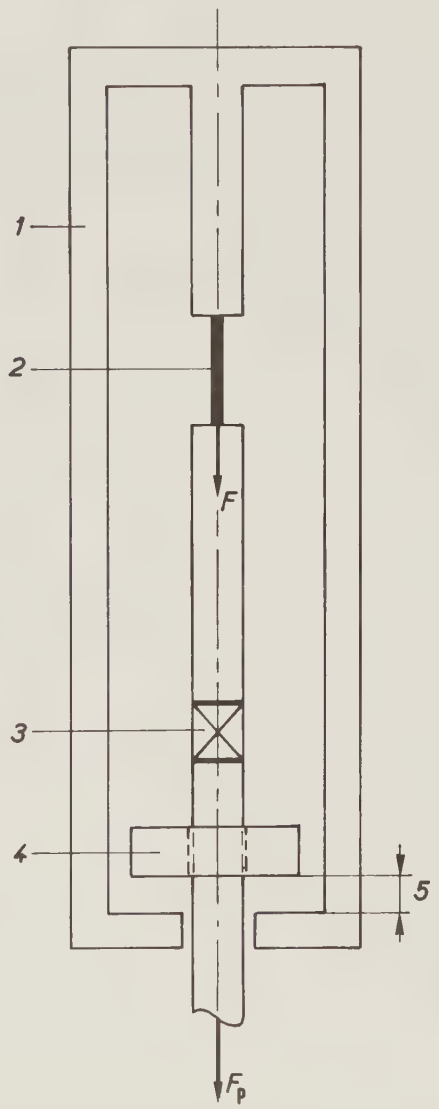


Fig. V,7 - Schéma de principe de l'appareil à relaxation multiple

1 - Bâti
2 - Eprouvette
3 - Dynamomètre
4 - Butée réglable
5 - Déplacement imposé D

V,2.2. Description (fig. V,8)

V,2.2.1 Mécanisme

L'allongement de l'éprouvette est provoqué par un système roue-et vis sans fin s'appuyant sur une butée, et commandé par un moteur électrique. Un vérin pneumatique, alimenté sous pression rigoureusement constante, fournit la force principale de traction permettant un mouvement particulièrement précis, puisque le moteur ne fournit que l'énergie nécessaire pour vaincre les frottements.

Ce moteur électrique est associé à une boîte de vitesses à 24 rapports qui permet d'imposer le déplacement ou de réaliser des essais d'écrouissage à des vitesses différentes.

Un dispositif permet de réaliser automatiquement des cycles entre 2 valeurs de force pour les mesures de raideur, destinées notamment à l'application de la méthode décrite au paragraphe IV,2.

L'arrêt du moteur peut être commandé automatiquement pour une certaine valeur préaffichée de la force, ou du déplacement total, ou du déplacement plastique grâce à l'adjonction de certaines fonctions de « l'appareil de mesure directe des déformations permanentes » décrit au paragraphe V,1. On peut ainsi réaliser sur la même éprouvette plusieurs relaxations successives pour des valeurs discrètes croissantes de la déformation (relaxation multiple) sans aucun démontage ni réglage supplémentaire.

V,2.2.2. Chauffage

Pour réduire les fluctuations de température sur l'éprouvette et éliminer l'influence des dilatations différentielles entre le bâti et la ligne d'amarrage de l'éprouvette, toute la partie supérieure du bâti est placée dans un four à 5 résistances électriques, régulées indépendamment, et se trouve ainsi à la même température que l'éprouvette. L'ensemble possède une très grande inertie thermique, favorable au maintien d'une température constante dans le temps.

Les 5 régulateurs électroniques, à action proportionnelle, sont pilotés par 5 thermocouples correspondant aux 5 zones de chauffage. Une bonne répartition de température peut ainsi être obtenue en jouant sur le point de consigne de chacun des régulateurs.

V,2.3. Mesures

La force sollicitatrice de l'éprouvette est mesurée par un dynamomètre, placé directement en série avec l'éprouvette. Il s'agit d'un dynamomètre à jauges à 2 ponts de mesure de grande précision réalisé selon les techniques **A. Devacht** [124]. L'un des ponts donne une mesure de la force, avec une précision relative de 10^{-3}, pour la visualisation et l'entrée dans un « appareil de mesure directe de la déformation visco-plastique ». L'autre pont donne une mesure, avec une sensibilité de 10^{-5}, pour l'enregistrement de l'évolution de la force en fonction du temps, qui constitue l'information essentielle de l'essai de relaxation. La chaîne de mesure est constituée principalement d'un étalon de tension et d'un voltmètre comparateur de haute sensibilité.

Le déplacement imposé est mesuré par un capteur inductif de haute sensibilité, placé à l'extérieur de la partie chaude de la machine.

Le déplacement visco-plastique est obtenu par un « appareil de mesure directe des déformations permanentes » selon la procédure décrite au paragraphe V,1 et incorporé dans la chaîne de mesure.

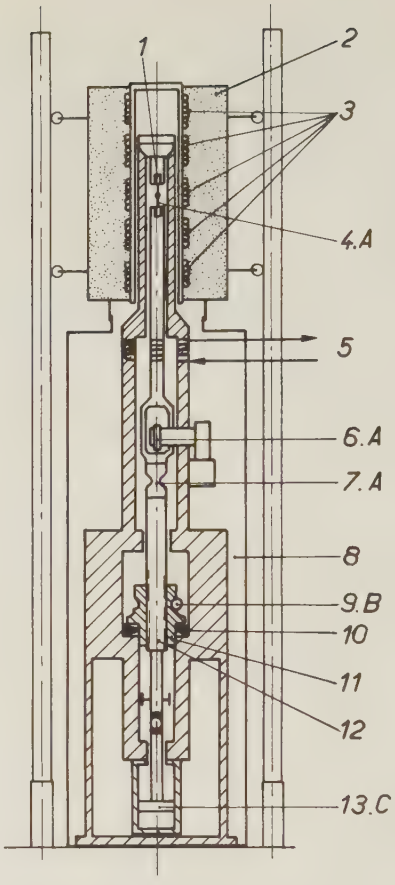


Fig. V,8 - Croquis de l'appareil à relaxation multiple

1 - Eprouvette
2 - Four à 5 résistances électriques
3 - Dispositif de régulation à 5 voies indépendantes
4A - 3 thermocouples
5 - Refroidissement à eau
6A - Capteur de déplacement
7A - Dynamomètre
8 - Enceinte calorifugée
9B - Déplacement
- à vitesse constante
- constant
10 - Butée
11 - Ecrou de butée
12 - Vis
13C - Vérin pneumatique

A - Enregistrement en fonction du temps
Température ($T \leq 800°C$)
Déplacement ($\Delta L \leq 100$ mm)
Force ($F \leq 1000$ daN)

B - Commande par vis sans fin-embrayage-frein-boite de vitesse et moteur électrique électriaue

C - Alimentation à pression constante

Ces 3 mesures, ainsi que la mesure de la température de l'éprouvette, effectuée par 3 thermocouples soudés sur cette dernière, peuvent être enregistrés sur un enregistreur incorporé à la chaîne et fonctionnant soit en « x , y » (force déplacement, soit en « x , y , t » (force et déplacement visco-plastique en fonction du temps).

V,2.4. Problèmes particuliers

Dans les essais de relaxation destinés à la détermination des lois de comportement ou à l'application de la méthode décrite au paragraphe IV,4, la grandeur essentielle à déterminer est la vitesse de déformation visco-plastique $\dot{\epsilon}_p$.

Pour une relaxation parfaite ($\dot{\epsilon} = 0$) sur un matériau élasto-visco-plastique à élasticité linéaire :

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E} = - \frac{\dot{\sigma}}{E} = - \frac{\dot{F}}{ES_o}$$

On voit immédiatement qu'il existe une relation entre la sensibilité du dynamomètre (mesure de F) et la vitesse minimale $\dot{\epsilon}_p$ qu'il est possible d'apprécier.

D'autre part, la raideur de l'ensemble de l'appareil n'étant pas infinie, les variations de force F induisent des déformations élastiques parasites ϵ_r et l'on doit écrire :

$$\dot{\epsilon}_p = - \frac{\dot{F}}{ES_o} + \dot{\epsilon}_r$$

Enfin, si la température n'est pas rigoureusement constante, ses fluctuations peuvent engendrer des dilatations différentielles qui, elles aussi, se traduisent par une déformation parasite ϵ_d :

$$\dot{\epsilon}_p = - \frac{\dot{F}}{ES_o} + \dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_d$$

V,2.4.1. Problème de la sensibilité du dynamomètre

En supposant que la vitesse $\dot{\epsilon}_p$ est calculée par différences finies, si $\frac{\delta F}{F_{max}}$ est la sensibilité du dynamomètre rapportée à son étendue de mesure, et si Δt_{Max} est l'intervalle de temps maximal pouvant séparer deux mesures, il est facile de montrer que :

$$\dot{\epsilon}_{p\,min} = \frac{1}{ES_o}\, 2\, \frac{\delta F}{F_{Max}}\, \frac{F_{Max}}{\Delta t_{Max}}$$

Dans le cas de l'appareil construit :

$$\frac{\delta F}{F_{Max}} = 10^{-5}$$

$$F_{Max} = 1000 \text{ daN}$$

et pour un cas usuel moyen,

$$E = 10^4 \text{ daN/mm}^2$$

$$S_o = 20 \text{ mm}^2$$

$$\Delta t_{Max} = 10^4 \text{ s}$$

$$\dot{\epsilon}_{p\,min} = 10^{-11} \text{ s}^{-1}$$

V,2.4.2. Problème de la rigidité

La chaîne cinématique de l'appareil peut se schématiser comme il est indiqué sur la figure V,9, chacun des éléments possédant une raideur non infinie.

Soit R_m la raideur de la partie «haute» de la machine, située au-dessus du capteur de déplacement.

Soit $R_e = \frac{ES_o}{L_o}$ la raideur de l'éprouvette.

La raideur R telle que

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_m}$$

est la raideur déterminée par les indications du dynamomètre et du capteur de déplacement lors du début d'un essai d'écrouissage, conformément à ce qui a été indiqué au paragraphe IV,1.1.

Soit R^* la raideur de la partie basse de la machine, située au-dessous du capteur de déplacement.

Si F_b est la force qui agit sur la butée, on a :

$$F_p = F + F_b$$

avec F_p = cte

$$\dot{F} = -\dot{F}_b$$

Si L est la longueur instantanée de l'éprouvette, la vitesse de déformation parasite s'exprime par :

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\dot{L}}{L_o}$$

Ces deux équations, introduites dans les équations d'équilibre quasi-statiques de l'ensemble, montrent que :

$$\dot{\epsilon}_r = -\frac{\dot{F}}{L_o}\left[\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R^*}\right]$$

Cette équation a trois conséquences remarquables :

1 - $\dot{F}$ étant toujours négatif (phénomène de relaxation), $\dot{\epsilon}_r$ est une quantité positive. Ceci montre que, par le jeu des raideurs non infinies du bâti, le phénomène de relaxation engendre une déformation de traction sur l'éprouvette ; on réalise ainsi automatiquement, et à peu de frais, la condition de non retour en arrière.

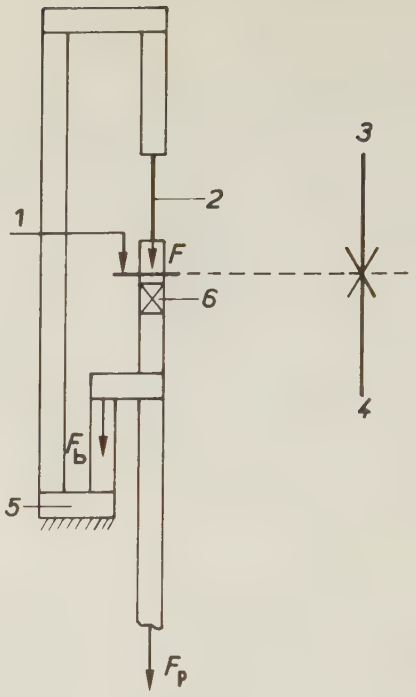


Fig. V,9 - Chaîne cinématique de l'appareil à relaxation multiple

1 - Capteur de déplacement
2 - Eprouvette
3 - Raideur R_m
4 - Raideur R^*
5 - Butée
6 - Dynamomètre

2 - Pour se rapprocher de la relaxation parfaite ($\dot{\epsilon} = 0$) $\dot{\epsilon}_r$ doit être petit devant $\dot{\epsilon}_p$.
Il faut donc dimensionner l'appareil pour que :

$$\frac{\dot{\epsilon}_r}{\dot{\epsilon}_p} \leq \delta$$

δ définissant le taux de déformation totale toléré.

Ceci se traduit par :

$$\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R^*} \leq \delta \frac{1}{R_e}$$

Pour l'appareil réalisé

$R_m \simeq$ 45 000 daN/mm

$R^* \simeq$ 25 000 daN/mm

et, pour une éprouvette de raideur moyenne,

$$R_e = \frac{ES}{L_o} \simeq 1600 \text{ daN/mm}$$

$$\delta = 10\ \%$$

ce qui explique le surdimensionnement apparent de l'appareil.

3 - La vitesse de déformation visco-plastique $\dot{\epsilon}_p$, dans l'essai de relaxation, peut s'obtenir d'une manière particulièrement simple et précise, par la seule connaissance de l'évolution de la force F en fonction du temps :

$$\dot{\epsilon}_p = -\frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\epsilon}_r$$

$$\dot{\epsilon}_p = -\frac{\dot{F}}{L_o}\left[\frac{L_o}{ES_o} + \frac{1}{R_m} + \frac{1}{R^*}\right]$$

or

$$\frac{L_o}{ES_o} + \frac{1}{R_m} = \frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_m} = \frac{1}{R}$$

d'où

$$\boxed{\dot{\epsilon}_p = -\frac{\dot{F}}{L_o}\left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R^*}\right]}$$

R est la raideur de l'ensemble machine plus éprouvette, mesurée au début de l'essai par l'appareil de mesure des déformations permanentes.

R^* est une raideur caractéristique de la machine, qui peut être évaluée par les indications du dynamomètre et du capteur de déplacement, en remplaçant l'éprouvette par un générateur de force (en présence de la force F_p).

Cette méthode permet d'obtenir directement la vitesse $\dot{\epsilon}_p$, corrigée de la déformation due aux raideurs, à partir d'une seule mesure effectuée avec précision : $F(t)$

V,2.4.3. Problème des dilatations différentielles

Il n'est malheureusement pas possible de trouver une méthode analogue à la précédente pour tenir compte de la déformation parasite ϵ_d due aux dilatations différentielles.

A l'aide du schéma de la figure V,9, il est facile de montrer que, dans le cas le plus défavorable, où toutes les dilatations s'ajoutent:

$$\dot{\epsilon}_d = \frac{\Lambda_B}{L_o} \alpha \dot{T}$$

Λ_B est la longueur totale développée du bâti

α est le coefficient de dilatation du matériau constitutif du bâti.

Pour que ce terme soit négligeable devant $\dot{\epsilon}_p$ il faut :

$$\frac{\Lambda_B}{L_o} \alpha \dot{T} \leq \delta \dot{\epsilon}_{p\,min}$$

Dans le cas de l'appareil construit :

pour

$\dot{\epsilon}_{p\,min} = 10^{-11} s^{-1}$

$\Lambda_B \simeq 2000$ mm

$L_o = 100$ mm

$\alpha = 10^{-5}$ mm/°

$\delta = 10$ %

il faut réaliser :

$$\dot{T} \leq 10^{-8} °/s$$

ce qui est impossible à contrôler.

Ceci explique la forme particulière de l'appareil. Pour éviter les fluctuations de température, l'ensemble de chauffage possède une très grande inertie thermique. Pour éviter les dilations différentielles, la partie supérieure du bâti est située dans le four avec l'éprouvette et la partie inférieure est dans une enceinte calorifugée. Néanmoins, l'appareil ne peut donner ses meilleures performances que s'il est placé dans un local climatisé.

V,2.5. Caractéristiques

Eprouvette - Longueur maximale : 150 mm

Diamètre maximal : 6 mm

Température - Valeur maximale : 800°C

Précision : ± 0,1°C

Stabilité : mieux que 0,01°C sur plusieurs heures

Déplacement - Déplacement maximal : 100 mm

Vitesses imposées : 24 vitesses entre 0,00033 mm/s et 2 mm/s

Précision de la mesure : 0,001 mm

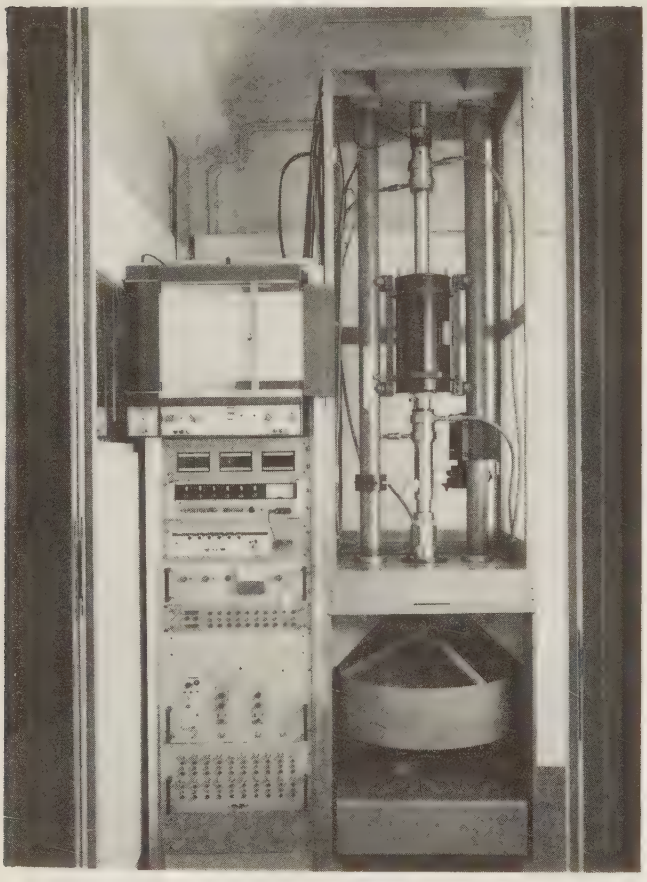
Force - Force maximale : 1000 daN

Sensibilité : 0,010 daN ce qui correspond à une vitesse minimale détectable de $\dot{\epsilon}_{p\,min} = 10^{-11}\,s^{-1}$

Cet appareil fait l'objet d'un brevet O.N.E.R.A. [125], son développement se poursuit dans le cadre du contrat D.G.R.S.T. déjà signalé au paragraphe IV,4.

Les améliorations portent essentiellement sur l'obtention d'une meilleure stabilité en température et sur l'augmentation de la sensibilité du dynamomètre.

V,3. Appareil à fluage (fig. V,10)



L'appareil à relaxation multiple, décrit au paragraphe V,2, est une machine à déplacement imposé (déplacement à vitesse constante, ou bien constant) adapté aux essais d'écrouissage et de relaxation. Pour compléter cet équipement, il était intéressant de créer une machine à force imposée qui permette de réaliser des essais à vitesse de force constante, ou bien à force constante (essais de fluage). Les nombreuses machines de fluage du commerce, (exemple : machines ADAMEL) permettent de réaliser d'excellentes expériences de fluage mais elles ne permettent pas de contrôler la force pendant son application ni de réaliser des essais à vitesse de force constante.

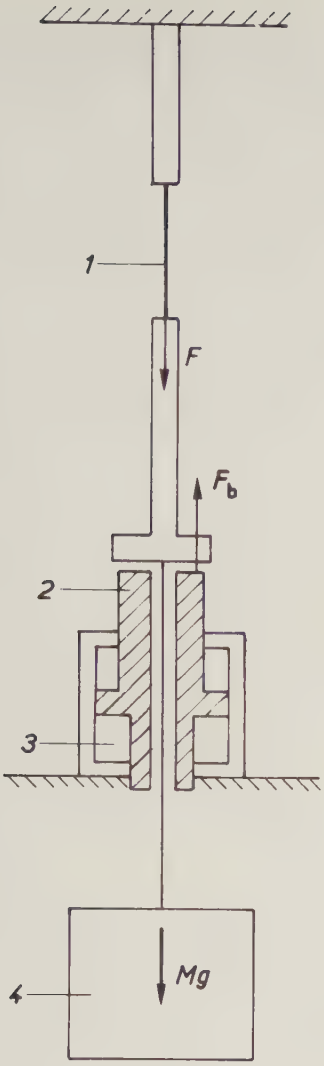
L'appareil décrit ici a été conçu et réalisé en vue d'effectuer des essais avec une commande précise de la force, en évitant l'emploi d'un asservissement; il s'agit d'une transposition «déplacement ⇄ force» de l'appareil à relaxation multiple.

◀ *Fig. V,10 - Appareil à fluage*

V,3.1. Principe (fig. V,11)

Les phénomènes de visco-plasticité étant particulièrement sensibles à de légères variations de contrainte (voir paragraphe II,3.2.2), les essais de fluage doivent être réalisés avec des efforts rigoureusement constants. Pour les essais de longue durée, la seule solution simple viable est de créer ces efforts avec des masses.

Pour la même raison, la transmission des efforts doit être réalisée sans frottement; c'est la raison pour laquelle nous avons éliminé la solution classique des leviers au profit d'une disposition à application directe de l'effort. Ainsi, dans les essais de fluage, la masse agit sur l'éprouvette sans aucun système intermédiaire. Cette disposition limite la charge maximale applicable mais elle permet de réaliser des expériences de fluage très pures.



Pour réaliser les expériences à vitesse de force constante, la masse M est soulagée par une butée commandée par un générateur de force qui peut produire une force F_b, à vitesse $\dot{F}_b$ constante, et telle que $\dot{F}_b < 0$

L'éprouvette est donc soumise à :

$$F = Mg - F_b$$

Tant que la butée est en contact :

$$F = Mg - F_b$$
$$\dot{F} = -\dot{F}_b = cte$$

Lorsque la butée est effacée :

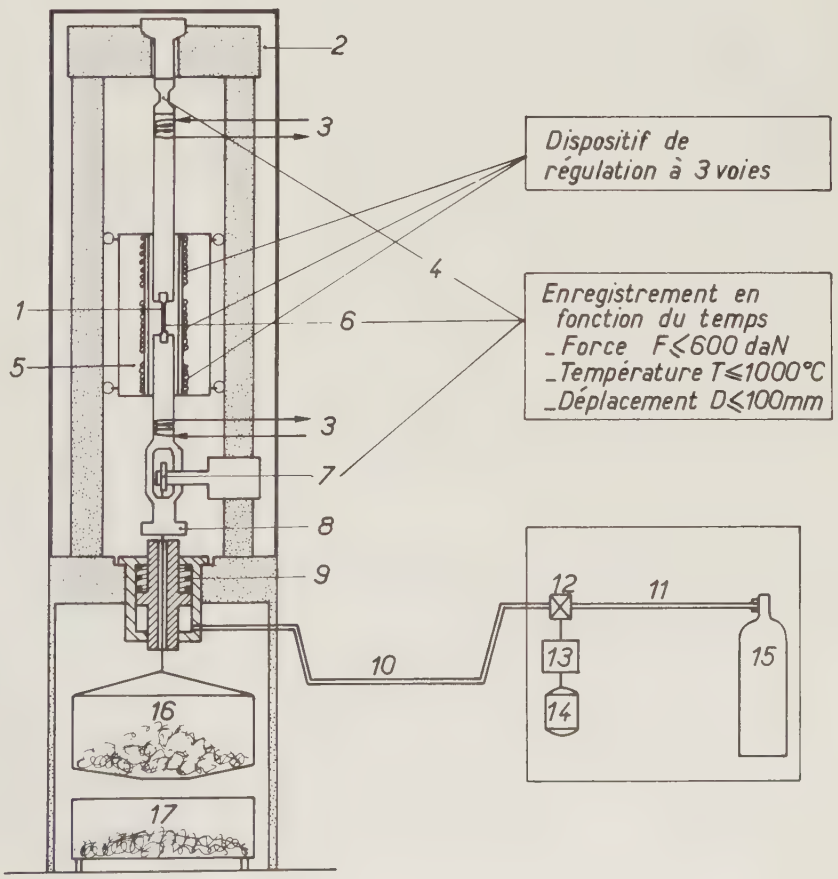
$$F = Mg$$
$$\dot{F} = 0$$

◀ *Fig. V,11 - Schéma de principe de l'appareil à fluage*

1 - Eprouvette
2 - Butée
3 - Pression
4 - Masse

V,3.2. Description (fig. V,12)

Fig. V,12 - Croquis de l'appareil à fluage ▶



1 - Eprouvette
2 - Enceinte calorifugée
3 - Refroidissement à eau
4 - Dynamomètre
5 - Four à 3 résistances électriques
6 - 3 thermocouples
7 - Capteur de déplacement
8 - Butée
9 - Ressort
10 - Pression - à vitesse constante
- constante
11 - Commande pneumatique
12 - Vanne régulatrice de pression
13 - Boîte de vitesses
14 - Moteur électrique
15 - Bouteille de gaz comprimé
16 - Grenaille de plomb
17 - Excédent de plomb

Le bâti, très classique, est constitué par deux colonnes fixées sur une table qui supporte le mécanisme de butée. L'éprouvette et sa ligne d'amarrage sont fixées à une traverse par l'intermédiaire d'un dynamomètre qui mesure directement la force appliquée sur l'éprouvette. Un four classique et des dispositifs de refroidissement permettent l'exécution des essais à chaud.

Le capteur de déplacement est situé en dehors de la partie chaude de la machine, la mesure de la déformation visco-plastique peut être effectuée par la méthode indiquée au paragraphe IV,1. La butée est plate pour assurer l'auto-alignement de l'ensemble. Le générateur de force est constitué par un vérin pneumatique à membranes sans frottement, à faible rappel élastique, commandé par une vanne régulatrice de pression, associée à une bouteille de gaz comprimé. Cette vanne est elle-même commandée par un moteur électrique, par l'intermédiaire d'une boîte de vitesses.

La chaîne de mesure comprend :

- une chaîne dynamométrique
- une alimentation pour le capteur de déplacement
- un appareil de mesure directe des déformations permanentes
- un enregistreur $(x\,y)$ ou (y, t)
- une visualisation des indications des thermocouples fixés sur l'éprouvette.

V,3.3. Caractéristiques

Eprouvette - Longueur maximale : 150 mm
Diamètre maximal : 6 mm

Température - Valeur maximale : 1 000°C
Précision : $\pm$ 0,5°C
Stabilité : mieux que 0,1°C sur plusieurs heures

Force - Valeur maximale : 600 daN
Vitesses imposées : 24 vitesses entre 120 daN/s et 0,02 daN/s
Précision relative de la mesure : 10^{-3}

Déplacement - Déplacement maximal : 100 mm
Précision absolue de la mesure : 0,001 mm

Citons, pour terminer, un moyen original d'obtenir, par un seul essai, plusieurs courbes de fluage à des contraintes différentes [126]. Il consiste simplement à utiliser une éprouvette plate de largeur variable soumise à une force constante. La contrainte reliée à la largeur de l'éprouvette varie le long de l'axe de l'éprouvette, et des jauges à résistance électrique réparties sur cet axe donnent simultanément, et en fonction du temps, les déformations correspondant aux contraintes différentes.

V,4. Machine d'essais en traction-torsion-compression (fig. V,13)

L'étude expérimentale des lois de comportement tridimensionnelles, et la vérification des méthodes de calcul dans des cas de chargement complexe, imposent des moyens d'essais susceptibles de créer des états de contrainte bi ou tridimensionnels. Il s'agit là d'un besoin relativement récent, ce qui explique l'absence de telles machines sur le marché.

Quelques laboratoires de mécanique des solides ont réalisé des montages ou machines d'essais complexes de faible puissance, souvent conçus en fonction de recherches précises sur les états d'équilibres élasto-plastiques [127 à 131] et rares sont les machines qui permettent l'étude des évolutions de fluage sur divers types d'éprouvettes [132].

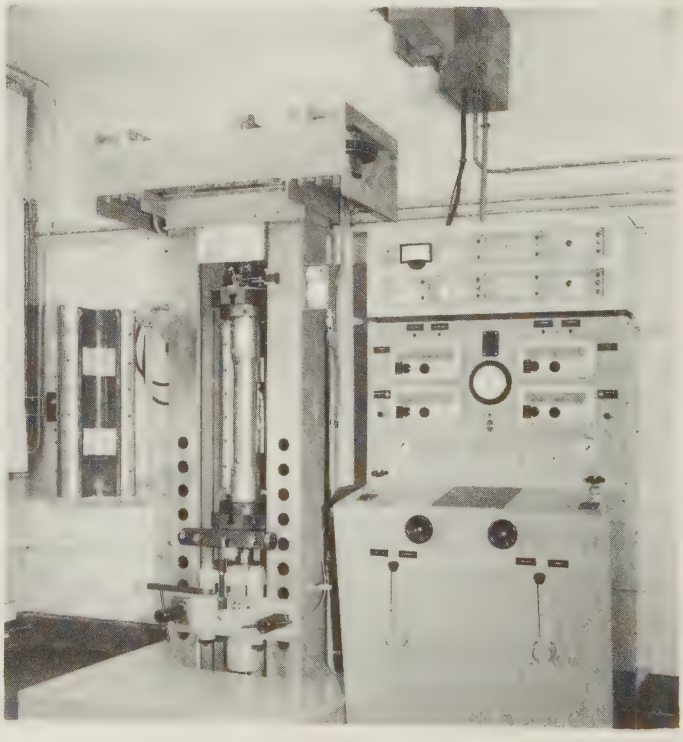


Fig. V,13 - Machine d'essai en traction-torsion-compression

L'O.N.E.R.A. a donc pris l'initiative en 1966 [133] de construire une machine à caractère industriel et économique qui permette de conduire des recherches sur le fluage sous charge complexe.

Pour réaliser l'état de contrainte multiple, il était intéressant d'associer des sollicitations qui, prises isolément, constituent des cas de chargement d'emploi courant et qui, couplées, conduisent à une machine de conception simple. Les efforts de traction ou compression, torsion, et éventuellement pression interne ont paru le mieux adaptés. La valeur des efforts et les dimensions de l'éprouvette ont été choisies en fonction des deux impératifs suivants :

- essais sur éprouvettes destinés à l'étude des lois de comportement tridimensionnel des matériaux ;
- essais sur maquettes destinés à la vérification de méthodes de calcul des structures.

Le cas limite type est celui d'un cylindre circulaire creux de diamètre moyen 100 mm, d'épaisseur 1 mm, de longueur 900 mm, sur lequel on crée les sollicitations suivantes :

- traction ou compression → contrainte normale axiale 80 daN/mm^2 : force 25 000 daN, déplacement maximal 150 mm ;
- torsion → contrainte tangentielle circonférencielle 40 daN/mm^2 : couple 600 m daN, rotation maximale 180° ;
- pression interne → contrainte normale circonférencielle 60 daN/mm^2: pression 120 bars.

La vitesse maximale de fluage envisagée (ramenée à la traction simple) est de 1 %/s.

Ces conditions imposent pratiquement une machine hydraulique.

V,4.1. Description

V,4.1.1. Bâti et création des efforts (fig. V,14)

Le bâti est constitué par un cadre caisson reprenant tous les efforts. L'extrémité inférieure de l'éprouvette est fixée sur un plateau sollicité en traction ou compression par un vérin de 25 000 daN et guidé en translation par un système de 4 galets roulant sur les colonnes du bâti. L'extrémité supérieure est fixée sur un plateau sollicité en torsion par deux vérins parallèles de 4 500 daN, créant un couple par l'intermédiaire de deux chaînes à maillons jointifs s'enroulant sur un tambour lisse. Ce plateau est guidé en rotation par deux roulements-butées à galets coniques placés en opposition. Les roulements et les galets de translation, à faible frottement, assurent le découplage de la traction ou compression et de la torsion.

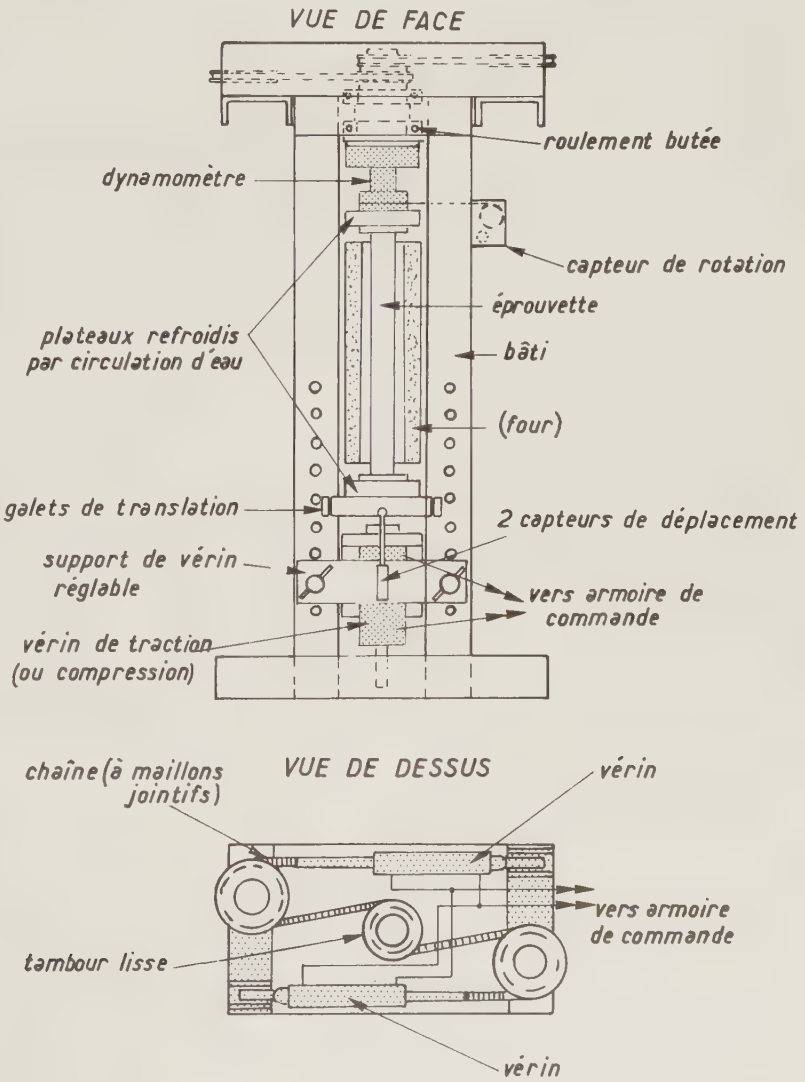


Fig. V,14 - Croquis de la machine d'essais en traction-torsion-compression ▶

V,4.1.2. Circuit hydraulique

Les circuits de traction-compression et torsion sont indépendants, de manière à éviter toute interaction. Ils sont centralisés dans l'armoire de commande et de mesures. Chacune des deux pompes fournit un débit d'huile de 2,5 l/mm à une pression régulée de 0 à 200 bars.

L'opérateur agit manuellement pour régler la force fournie par le ou les vérins. La machine fonctionne donc par force et couple imposés.

V,4.1.3. Mesures

La particularité la plus intéressante de cette machine est la mesure directe des sollicitations effectivement subies par l'éprouvette. Elle s'effectue au moyen d'un dynamomètre placé en série avec l'éprouvette, évitant ainsi tout système perturbateur. Il s'agit d'un dynamomètre à jauges électriques, qui analyse les efforts de traction-compression et torsion, grâce à un ensemble de circuits correcteurs dont la technique a été développée par **A. Devacht** [124].

Le déplacement de translation est mesuré par deux capteurs potentiométriques linéaires, à couche de graphite, dont la demi-somme des tensions de sortie représente le mouvement axial du plateau inférieur de la machine.

Le déplacement de rotation est transmis par un câble métallique à un capteur potentiométrique circulaire à couche de graphite.

Ces quatre informations (force, couple, déplacement, rotation) sont visualisées par les galvanomètres de l'armoire de commande et de mesures ; des sorties en parallèle sont prévues pour la mesure et l'enregistrement par chaîne automatique. Pour chaque étude particulière, il est, bien entendu, possible d'ajouter tout capteur supplémentaire.

V,4 .2. Equipements

V,4.2.1. Four et dispositif de régulation

L'éprouvette peut être chauffée par un four électrique ouvrant à 7 zones de chauffage indépendantes, constituées chacune par deux résistances « pyroténax » montées en série. La puissance de chaque zone est de 1 kW. Il est muni de 7 séries de 4 trous radiaux permettant le passage de palpeurs.

Le dispositif de régulation permet d'obtenir sur l'éprouvette une température, constante dans le temps, soit uniforme sur toute l'éprouvette, soit caractérisée par un gradient longitudinal.

La régulation dans le temps est assurée automatiquement par chacun des 7 régulateurs en fonction des indications de chacune des 7 sondes correspondant aux 7 zones du four.

La régulation dans l'espace est assurée par action manuelle sur le point de consigne des régulateurs.

V,4.2.2. Dispositif de pressurisation

Compte tenu de la température possible de l'éprouvette (800°C), la pressurisation ne peut être assurée que par un gaz. Le dispositif réalisé se compose essentiellement d'une bouteille de gaz comprimé (air, azote, argon), d'une soupape, régulatrice de pression, de précision et d'un manomètre.

L'explosion de l'éprouvette pouvant intervenir au cours de l'essai, des règles de sécurité ont dû être établies. Des essais effectués en liaison avec la division acoustique de l'O.N.E.R.A., le service de sécurité et le service médical ont permis de fixer à 1 dm^3 le volume maximal pouvant être pressurisé à 120 bars dans l'éprouvette type, sans danger acoustique. Les éprouvettes destinées à ce genre d'essai doivent donc être munies d'un cylindre interne inerte limitant le volume libre.

V,4.3. Caractéristiques, précisions

Dimensions des éprouvettes

- essais à froid : diamètre 250 mm, longueur 900 mm
- essais à chaud : diamètre 100 mm, longueur 700 mm

La fixation sur les plateaux refroidis est assurée par des assemblages tenons-rainures et boulons.

Géométrie de la machine

Il a été vérifié que les diverses déformations du bâti sous charge sont symétriques par rapport à l'axe de la machine et linéaires en fonction des sollicitations. Elles sont de l'ordre de 0,1 mm pour les charges maximales.

Les jeux, qui sont de l'ordre de 0,2 mm suivant l'axe et 0,4° en rotation, sont pratiquement libérés pour des charges inférieures aux 2/100 des efforts maximaux.

Compte tenu de ces déformations et des tolérances des assemblages, on peut estiner que les défauts d'alignement de l'axe de l'éprouvette et de l'axe de la machine n'excèdent pas 0,02 mm.

Mesure des efforts et déplacements

La visualisation de la force, du moment, du déplacement et de la rotation, est assurée par des galvanomètres à 4 gammes de mesures d'une classe de précision de $\pm$ 2 %.

Les mêmes mesures, destinées à l'enregistrement, ont une précision de 0,2 % (ou 25 daN et 0,6 mdaN) pour les efforts et de 0,1 % (ou 0,01 mm et 0,05°) pour les déplacements.

La stabilité après 3 heures de fonctionnement à vide, est de l'ordre de 0,2 à 0,5 %, la force alternative résiduelle en traction ou compression, due à la pompe hydraulique, est de $\pm$ 6 daN.

Couplage

Une qualité essentielle d'une telle machine est l'absence de couplage entre les efforts et mouvements de translation et de rotation. Ils ne peuvent avoir que deux origines :

- couplage introduit par l'analyse dynamométrique : 0,2 %
- couplage introduit par les déformations du bâti et les frottements dans les galets et roulements : un certain nombre de mesures effectuées sur une éprouvette souple (ressort) et une éprouvette raide permet de conclure que ce couplage n'est pas décelable dans le cadre de la précision de mesures indiquée.

Chauffage

Le four de 700 mm de long permet le chauffage correct d'une partie utile d'éprouvette de 450 mm avec les précisions suivantes :

- temps de stabilisation de la température pour une dérive $\leq$ 0,5°C/heure : 4 à 5 heures :
- fluctuations, dans le temps, dues au système de régulation : $\leq$ 0,2°C ;
- répartition de la température sur une circonférence de l'éprouvette : $\pm$ 1°C ;
- répartition de la température sur une génératrice de l'éprouvette : $\pm$ 2°C (dans le cas d'une carte uniforme).

Cette machine permet de réaliser approximativement un programme de charges prévu à l'avance (réglages manuels en fonction des indications des galvanomètres). Le programme effectivement subi par l'éprouvette est connu avec précision par l'enregistrement des indications du dynamomètre. Il existe actuellement deux exemplaires de cette machine : l'un à la Direction Résistance des Structures de l'O.N.E.R.A., l'autre au laboratoire de mécanique des solides de la Faculté des Sciences d'Orsay.

CHAPITRE VI

CONCLUSIONS ET DÉVELOPPEMENTS

Les diverses applications qui ont été traitées montrent que le type des lois de comportement proposées est bien compatible avec la possibilité d'effectuer des calculs de structures. Les confrontations, entre calculs théoriques et résultats expérimentaux, prouvent qu'en général ces lois donnent une assez bonne représentation des phénomènes élasto-visco-plastiques. Toutefois, il convient d'être prudent et de considérer que ces méthodes, utilisées dans un but prévisionnel, ne donnent que l'ordre de grandeur des déformations visco-plastiques ; en effet, la pratique montre que la marge d'erreur relative «normale» est de l'ordre de 5 à 20 %, compte non tenu de l'incertitude qui pèse sur l'évaluation des charges appliquées. Dans la plupart des cas, cette précision suffit pour effectuer un dimensionnement correct des structures, car il est toujours possible de calculer une borne supérieure de la déformation, dont la probabilité d'existence définit la sécurité.

Comme dans toute recherche appliquée, l'analyse des différences entre prévision et réalité constitue un puissant moyen de progrès. Ici, les différences mises en évidence sont dues, essentiellement, aux hétérogénéités d'élaboration des matériaux, aux imprécisions de mesure de leurs caractéristiques, et enfin à la forme des lois de comportement, qui résulte d'un compromis entre les exigences, contradictoires, de simplicité de mise en oeuvre et de traduction fidèle de phénomènes compliqués. Pour être complet dans le domaine des calculs de structures, il faut encore ajouter deux sources d'erreurs, qui sortent du cadre de cette étude : l'imprécision dans la connaissance des programmes de chargement et les approximations inhérentes aux méthodes de calcul. Ces différents aspects vont être étudiés brièvement, afin d'en dégager quelques voies de recherches.

VI,1. La connaissance des programmes de chargement

Cette question déborde largement les études de lois de comportement mais elle y est liée pour le problème de la définition des marges de sécurité dans l'utilisation des structures. L'amélioration de la précision dans la connaissance des charges extérieures appliquées aux structures est un problème pluridisciplinaire fort délicat. Sans chercher à le résoudre, il semble que, pour une précision donnée, quelle qu'elle soit, un grand progrès pourrait être accompli par l'introduction systématique d'une définition statistique ou probabiliste des sollicitations. Cet aspect est très étudié dans les problèmes de fatigue [134] et, a priori, il semble possible d'envisager des techniques de même type pour les problèmes quasi-statiques, qu'il s'agisse de sollicitations aléatoires ou de sollicitations stationnaires, connues avec une marge d'incertitude.

VI,2. L'élaboration des matériaux

Malgré toutes les précautions prises lors de l'élaboration des matériaux, les propriétés de toute nuance varient d'une manière sensible suivant la coulée, le lot, le lingot et même le point considéré. La difficulté d'obtenir des traitements thermiques, parfaitement reproductibles, engendre des dispersions plus importantes encore, que, seule, l'amélioration des techniques de contrôle peut diminuer. Toutes les études expérimentales, présentées ici, ont été effectuées sur des matériaux industriels du commerce, pour que les dispersions obtenues soient représentatives de cas d'applications réels. Là encore, pour améliorer la validité des calculs prévisionnels de structures, on pourrait envisager des calculs basés sur une définition probabiliste des caractéristiques des matériaux.

VI,3. Les méthodes de calcul

Dans les applications, il est assez difficile de discerner l'influence des hypothèses simplificatrices, introduites dans les méthodes (théories de poutres, de coques...), de l'influence des autres sources d'imprécision. Il semble qu'actuellement les problèmes mal résolus résident dans le calcul des régions « géométriquement perturbées » (bords de trous, liaisons, raidisseurs, etc...). Le calcul, par maillage et pas à pas, peut être utilisé pour ces cas compliqués mais, outre des problèmes d'analyse numérique très délicats, il se pose des problèmes d'ordre théorique, quant au choix d'hypothèses cinématiques convenables et de conditions limites réalistes. D'un point de vue plus général, la méthode semi-globale et la méthode des éléments finis semblent être des voies de recherches prometteuses. De toute manière, l'adaptation des méthodes aux programmes de sollicitations aléatoires s'impose.

Dans le domaine des méthodes de calcul approchées, si utiles dans les bureaux d'études, un important travail reste à effectuer en visco-plasticité. Dans certains cas particuliers, les théories générales peuvent se réduire à des méthodes relativement simples ; il faut citer là les travaux de **C.R. Calladine** [135-136]. La méthode de «l'analogie élastique et plastique» [137] et surtout la méthode de la «contrainte de référence» [138], qui semble d'un grand intérêt pratique, sont des méthodes appelées à se développer, mais l'étude systématique de leur degré d'approximation reste à faire.

VI,4. La détermination des caractéristiques des matériaux

Durant les dernières décennies, ce domaine expérimental de la mécanique des solides a pris un retard considérable par rapport aux techniques de la physique en général. Les machines d'essais, à commande programmée et mesures numériques, ne sont apparues sur le marché que très récemment et les méthodes d'analyse fine font défaut. Les méthodes et moyens expérimentaux, liés à l'essai de relaxation, et décrits dans les chapitres IV et V, constituent une tentative pour améliorer la précision dans la détermination pratique des lois de comportement, mais de grands progrès restent à accomplir.

Un des problèmes fondamentaux, dans ce domaine, est certainement la détermination des lois de comportement par un essai non destructif. Si un tel moyen existait, chaque partie de structure pourrait être caractérisée, lors de sa fabrication et même en cours de service. Les calculs seraient alors effectués sur la base de données «personnalisées» si l'on peut dire, et l'on éviterait ainsi une des sources majeures d'imprécision. Dans ce domaine, de nombreuses voies de recherches sont possibles, puisqu'il s'agit en fait de la recherche de relations entre paramètres dits «mécaniques» et paramètres dits «physiques». Pour rester dans le domaine du laboratoire de mécanique, on peut citer deux voies, sans doute complémentaires, qui ont été abordées, très partiellement, à l'O.N.E.R.A. et au Laboratoire de mécanique de la Faculté des Sciences d'Orsay :

- Des mesures d'énergie, dissipée dans les matériaux lors de vibrations ou de propagations d'ondes, devraient conduire à la détermination de certains coefficients ou fonctions caractéristiques. L'expression de l'amortissement interne, trouvée au paragraphe II,5.2, peut être considérée comme une première justification de cette idée.
- L'essai de dureté pourrait être envisagé comme un essai quasi-statique, dans lequel la force de pénétration et le déplacement seraient mesurés, en fonction du temps, dans les trois cas de la méthode globale : écrouissage, fluage et relaxation. Il est certain que les phénomènes mis en jeu, dans l'essai de dureté, sont liés à la loi de comportement et l'on peut envisager d'accéder à cette dernière par ce moyen. Pour cela, une étude approfondie de la mécanique du poinçonnement est nécessaire. Elle n'a été abordée, jusqu'ici, que dans le cas de la plasticité.

VI,5. La forme des lois de comportement

Les lois de comportement étudiées ici ne constituent, nous l'avons dit, qu'une schématisation grossière de la réalité. Le plus gros écueil est sans doute la traduction de l'histoire des sollicitations par le seul paramètre $\tilde{e}_{pI}$, c'est-à-dire un scalaire lié au tenseur des déformations visco-plastiques, mais il paraît difficile d'introduire un paramètre plus représentatif, sans aboutir à une forme de loi compliquée. De toute façon, un vaste champ de recherches reste ouvert pour améliorer la précision des lois de comportement et répondre à un certain nombre de questions, laissées en suspens ici :

- Le passage rigoureux des théories de plasticité aux théories de visco-plasticité d'une part, et l'étude de l'influence des troisièmes invariants des déviateurs des contraintes et des déformations d'autre part, sont deux problèmes fort anciens qui n'ont toujours pas reçu de solution.
- Deux points paraissent plus importants dans l'immédiat : l'introduction explicite du paramètre température dans les lois de comportement et la prise en compte de l'anisotropie engendrée par les déformations visco-plastiques.
- L'extension de la validité des lois de comportement à un certain nombre de cas, de grande importance pratique, peut être envisagée sur la base des méthodes décrites :
  - cas des chocs mécaniques et thermiques
  - cas des matériaux non stables
  - cas des matériaux visco-élastiques-visco-plastiques, pour les composés de synthèse
  - cas des matériaux hétérogènes, dans l'optique des matériaux composites, appelés à un grand essor industriel.

- Deux phénomènes, enfin, devront être incorporés dans les lois de comportement : le fluage naissant et la rupture.
  - Le fluage naissant a été assez peu étudié jusqu'ici, et il est vraisemblable que les formes de lois présentées ne soient pas valables, en toute rigueur, pour les toutes premières micro-déformations visco-plastiques.
  - La mécanique de la rupture fragile est étudiée depuis longtemps, mais les liens entre rupture ductile et rupture fragile, entre rupture statique et rupture dynamique, sont mal connus. Actuellement, la théorie de **Kachanov** [139] permet d'introduire une condition de rupture fragile, sans conduire à des volumes de calculs trop importants, même pour des structures complexes [140]. Son extension au cas des chargements quelconques pourrait être envisagée, dans le cadre des lois développées aux chapitres II et III, lois qui contiennent déjà la rupture ductile. On ouvre là les portes du vaste domaine de l'endommagement de fatigue.

D'une manière plus générale, et sur le plan fondamental, on peut espérer de grands progrès en matière de lois de comportement, dans la recherche d'un formalisme unifiant la physique des solides, la thermodynamique des milieux continus et la mécanique des solides.

Manuscrit remis le 16 octobre 1970.

RÉFÉRENCES

[1] VALID R. – *Une méthode de calcul des structures en plasticité et en fluage isotherme.* Communication au 12e Congrès international de Mécanique Appliquée, Stanford (1968). Rech. Aérosp. nº 127 (1968).

[2] HOFF N.J. – *The analysis of structures.* John Wiley (1956).

[3] MAZET R. – *Sur la représentation dynamique d'une structure lamellaire soumise à une charge qui provoque un fluage localisé.* C. R. Ac. des Sc., t. 256, (1963), p. 2971.

[4] KACHANOV L.M. – *Analytical methods of creep design especially within the nonlinear range.* Math. Fac. Leningrad State University USSR (1963).

[5] LEMAITRE J. – *Dimensionnement des structures à durée de vie limitée.* Rech. Aéron. nº 91, (1962).

[6] FRIEDEL J. – *Dislocations.* Pergamon press, (1964).

[7] COTTRELL A.H. – *Dislocations and plastic flow in crystals.* Clarendon press, Oxford, (1956).

[8] JAOUL B. – *Etude de la plasticité et application aux métaux.* Dunod, Paris, (1965).

[9] ZARKA J. – *Sur la visco-plasticité des métaux.* Thèse, Fac. des Sc. de Paris, (1968).

[10] KRÖNER E. – *Dislocation : a new concept in the continuum theory of plasticity.* Journ. of Math. and phys., vol. 42 nº 1, (1963), p. 27.

[11] PERZYNA P. – *Thermal effects in viscoelasticity. Problems of thermoelasticity.* Polska Akademia Nauk. Warszawa (1967), p. 146.

[12] MEIXNER J. – *Thermodynamics of irreversible process has many faces.* I.U.T.A.M. Symposium on irreversible aspects of continuum mechanics. Vienna, Austria (1966).

[13] ERINGEN A.C. – *A unified theory of thermomechanical materials.* Int. J. Engng Sc. vol. 4 (1966).

[14] HALLEY J.C. – *Etude des phénomènes isothermes et non isothermes pour un matériau élasto-visco-plastique.* Thèse Doctorat 3è cycle, Faculté des Sciences d'Orsay (1968).

[15] BIOT M.A. – *Theory of the stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena.* Journal of Applied Physics, vol. 25 nº 11 (1960).

[16] BYCHAWSKY Z. and FOX A. – *Foundations of a theory of non linear viscoelasticity.* Arch. Mech. Stosow 4, 19 (1967).

[17] SOUISSI A. – *Description du comportement des métaux à chaud à l'aide d'une loi intégrale.* Thèse Docteur-Ingénieur Fac. des Sc. de Paris (1969).

[18] SOUISSI A. et LEMAITRE J. – *Comportement des métaux à chaud. Vérification d'une loi tridimensionnelle de type intégral.* C. R. Ac. des Sc., t. 269 (1969), p. 465.

[19] ODQVIST F.K. – *Mathematical theory of creep and creep rupture.* Pergamon press (1966).

[20] MAZET R. – *Cours de Mécanique des Solides.* Faculté des Sciences d'Orsay (1964).

[21] MAZET R. et COUPRY G. – *Sur une conception hétérogène des milieux solides travaillant au delà du domaine élastique.* Communication présentée au XIe Congrès International de Mécanique Appliquée, Munich (1964).

[22] VALID R. – *Des problèmes de liaison en Mécanique des milieux continus.* Conférence, Faculté des Sciences de Poitiers (Département de Mécanique) (1967).

[23] MAZET R. – *Sur la détermination des caractéristiques de fluage d'un matériau hétéro-plastique à l'aide d'essais d'écrouissage isothermes.* Communication au 2e Symposium sur le fluage dans les structures. Göteborg, Suède (1970).

[24] PERSOZ B. – *Modèles analogiques non linéaires.* Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, t. IV nº 3 (1959).

[25] NAYROLES B. – *Recherche d'une méthode d'étude des structures élasto-plastiques discrètes.* Thèse Faculté des Sciences de Paris (1965).

[26] CRUSSARD C. – *Nouveau modèle rhéologique du fluage.* Revue de Métallurgie, nº 4, (avril 1958), p. 375.

[27] BRIDGMAN P.W. – *Studies in large plastic flow and fracture.* Mc Graw-Hill Book company (1952).

[28] GERMAIN P. – *Mécanique des milieux continus.* Masson, Paris (1962), p. 83.

[29] NADAI A. – *Theory of flow and fracture of solids.* Mc Graw Hill Book Company, tome I (1950), tome II (1963).

[30] LUBAHN J.D. and FELGAR R.P. – *Plasticity and creep of metals.* John Wiley, New-York (1961).

[31] NORTON F.H. – *Creep of steel at high temperatures.* Mc Graw Hill Book Company (1929).

[32] SODERBERG C.R. – *The interpretation of creep tests for machine design.* Trans. A.S.M.E. 58 (1936), p. 733-743

[33] ANDRADE E.N. – *The viscous flow in metals ans allied phenomena.* Proc. Roy. Soc. London A 84 (1910).

[34] ODQVIST F.K. and HULT J. – *Kriechfestigkeit metallischer.* Werkstoffe Springer Verlag (1962).

[35] HOFF N.J. – *Les fondements de la mécanique du fluage dans un corps métallique.* Conférences Institut Henri Poincaré, Paris (1964).

[36] DORN J.E. – *Mechanical behaviour of materials at elevated temperature.* Mc Graw Hill Book Company (1963).

[37] MALININE N.N. – *Les lois et le calcul du fluage pour les éléments de machines.* Messager de la construction mécanique (URSS) nº 1 (1959), traduction R. Dedeban, O.N.E.R.A.

[38] RABOTNOV Y.N. – *Le fluage des éléments de construction.* Moskwa Izdat Nauka (1966).

[39] NAMESTNIKOV V.S. et RABOTNOV Y.N. – *Sur l'hypothèse d'une équation d'état en fluage.* TMTF SSR, nº 3 (1961), p. 101.

[40] LEMAITRE J. – *Sur la détermination des paramètres de fluage de Norton-Hoff.* C.R. Ac. des Sc. de Paris, t. 261 (1965), p. 3731.

[41] LEMAITRE J. – *La recherche des lois de comportement des matériaux de construction mécanique.* Rech. Aérosp. nº 112 (1966).

[42] GOBIN P. – *Les essais mécaniques à vitesse de déformation variable.* Conférence prononcée au Groupement pour l'Avancement de la Mécanique Industrielle (1967).

[43] LABOURDETTE R. – *Loi de comportement et techniques de calcul d'éléments de structures en matériaux sandwich synthétiques.* Communication ATMA, session 1969.

[44] HILL R. – *The mathematical theory of plasticity.* At the Clarendon Press-Oxford (1950).

[45] BRUN L. et ZAOUI A. – *Sur l'hésitation au fluage.* Cahiers du Groupe Français de Rhéologie nº 5, tome I (1967).

[46] MORROW J.D. – *Cyclic plastic strain energy and fatigue of metals.* Symposium ASTM, Chicago (1964).

[47] MANDEL J. – *Séminaire de plasticité.* Publication scientifique et technique du Ministère de l'Air. NT 116 (1962), p. 13.

[48] LEMAITRE J. - CHABOCHE J.L. et GALHARAGUE C. – *Sur un paramètre de cumulation dans le fluage avec retours en arrière.* C.R. Ac. des Sc. de Paris, t. 272 (1971), p. 74-77.

[49] PERZYNA P. – *On the dynamic behaviour of rate sensitive plastic materials.* Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, vol. XII, nº 4 (1964).

[50] TAIRA S. and TANAKA K. – *Creep deformation under varying stress.* Proc. of the 8th Japan National Congress for Applied Mech. (1958), p. 225.

[51] POULIGNIER J. – *Fluage périodique rapide. Cas du Nicral D.* La Rech. Aéron. nº 83 (1961), p. 33.

[52] BOUGAKOV I. L. et VAKOULENKO A.A. – *Sur la théorie du fluage des métaux.* Izvestiia Akademii Nouka SSSR, Mexanika i Machinostroenie, nº 6 (1963), p. 3. Traduction SEREB.

[53] NOWACKI W. – *Dynamical problems of thermoelasticity. Problems of thermoelasticity.* Polska Akademia Nauk Warszawa (1967), p. 53.

[54] DORN G.E. – *Some fundamental experiments on high-temperature creep.* J. of Mechanical and physics of solids, vol. 3 nº 2 (1955), p. 85.

[55] LEMAITRE J. – HALLEY J.C. et POLICELLA H. – *Influence du paramètre vitesse de température sur le comportement des solides élasto-visco-plastiques.* C.R. Ac. des Sc. de Paris, t. 267 (1968), p. 521.

[56] POULIGNIER J. – *Appareillage de traction rapide à haute température pour l'étude des matériaux aérospatiaux.* La Revue de Métallurgie (février 1966).

[57] ARUTYUNYAN N.K. – *Some problems in the theory of creep in concrete structures.* Pergamon Press (1966).

[58] FISHER W.A.P. – *A parameter to represent the mechanical properties of aluminium alloys after soaking at elevated temperatures.* ARC Current Paper 506 (1960).

[59] HENDERSON J. and SNEDDEN J.D. – *Creep recovery of aluminium alloy.* DTD 2L42. Applied materials research (July 1965).

[60] HULT J. – *Phenomenological aspects of creep irreversibility.* Proc. IUTAM symposium, Vienna (June 1966).

[61] RABOTNOV Y.N. – *Some problems on the theory of creep (1948).* Transl. NACA nº TM 1353 (1953).

[62] PERSOZ B. – *Introduction à l'étude de la rhéologie.* Dunod, Paris (1960).

[63] DAWANCE G. et CHAGNEAU A. – *Expériences de relaxation des contraintes dans le béton précontraint.* Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, nº 120 (1957).

[64] DAVID J.C. – ROQUES C. et BASTIEN P. – *Relaxation des contraintes et soudabilité des aciers.* Communication Société des Ingénieurs soudeurs (1964).

[65] LEMAITRE J. – *Intérêt des essais de relaxation appliqués à l'étude des corps élasto-visco-plastiques.* Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, nº 5, tome I (1967). Traduction en anglais Boeing BSRLF 222.

[66] SOURD B. – *Représentation fonctionnelle approchée de l'intégrale* $J = \int_0^z \frac{X^{\frac{n}{m}}}{[Y - X]^n} dX$ Travail non publié.

[67] BONNIN J.C. et LEMAITRE J. – *Sur l'essai de relaxation multiple.* C.R. Ac. des Sc. de Paris, tome 263 (1966), p. 880.

[68] MONTHULET A. – *Amélioration des moyens et méthodes d'essais en plasticité-fluage.* Note Technique O.N.E.R.A. nº 114 (1967).

[69] HOFF N.J. – *Mechanics applied to creep testing.* The William M. Murray Lecture, Stanford University, Calif. U.S.A. (1958).

[70] BONNIN J.C. – *Etude du champ d'application d'une loi récemment proposée pour le comportement dynamique des matériaux élasto-visco-plastiques.* Thèse 3e cycle, Fac. des Sc. d'ORSAY (1967).

[71] GROUPE FRANCAIS DE RHEOLOGIE – *Dictionnaire de Rhéologie.* Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, nº 252 (1968).

[72] FRIEDEL J. – *Fluage et frottement intérieur de haute température.* Colloque sur le frottement intérieur des métaux, St Germain en Laye (1960).

[73] SALCEANU C. et VARGA S. – *Variation avec la traction du frottement interne des fils métalliques.* C. R. Ac. des Sc. de Paris, t. 268 série A (1969), p. 613.

[74] LAZAN J. – *Energy dissipation mechanisms in structures with particular reference to material damping.* In structural damping, J.E. Ruzicka, Pergamon press (1960).

[75] MARIN J. et SHARMA M.G. – *Material design for resonant members.* In structural damping, J.E. Ruzicka, Pergamon press (1960).

[76] LOISEAU H. – *Mesure du module d'YOUNG et de l'amortissement interne des matériaux en fonction de la température.* Rech. Aérosp., nº 125 (1968), p. 79.

[77] VALLURI S.R. – *Some observations on the relationship between fatigue and internal friction.* NACA TN 3755 (1956).

[78] CRUSSARD C. – SAADA G. et PHILIBERT J. – *Le frottement intérieur des métaux.* C.R. du Colloque de St Germain en Laye (1960).

[79] MAZET R. – *Vibrations d'une structure lamellaire sous fluage localisé.* International symposium on stress waves in anelastic solids. Brown University (1963).

[80] HOFF N.J. – *Damping of the vibrations of a coiled spring due to creep.* SUDAER nº 96, Stanford (1960).

[81] HOFF N.J. – *Structures and materials for finite life time.* Proceeding IICAS Congress, Madrid (1958), vol. II, p. 928 (1959).

[82] BERGER H. – *Etude sur des cas simples des méthodes de calcul en fluage.* Rech. Aérosp., nº 134 (1970).

[83] VALID R. – LEMAITRE J. et BERGER H. – *Un cas d'anisotropie en plasticité étudié sur une poutre en traction-torsion.* Rech. Aérosp. , nº 121 (1967).

[84] PRAGER W. – *The theory of plasticity. A survey of recent achievements.* Proc. Inst. Mech. Eng. (1955), nº 169, p. 41.

[85] KOITER W.T. – *Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface.* Quaterly of Applied Mathematics, vol. 11 nº 3, (1953), p. 350.

[86] MORCHOISNE Y. – *Contribution à l'étude de l'écrouissage des matériaux métalliques.* Thèse, Faculté des Sciences d'Orsay (1969).

[87] PERZYNA P. – *On the constitutive equations for work-hardening and rate sensitive plastic materials.* Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, vol. XII nº 4 (1964).

[88] BUI H.D. – *Ecrouissage des métaux.* C. R. Ac. des Sc. de Paris, série A, t. 259, p. 4509 (1964), t. 262, p. 401 (1966).

[89] VALID R. – *Sur le calcul des coques hors du domaine élastique.* C.R. Ac. des Sc. de Paris, t. 263 (1966), p. 88.

[90] LAMBERMONT J.H. and BESSELING J.F. – *An experimental and theoretical investigation of creep under uni-axial stress of a Mg-alloy.* 2e symposium IUTAM sur le fluage dans les structures, Göteborg (Suède) 1970.

[91] VALIRON G. – *Equations fonctionnelles - Applications.* Masson, 1950.

[92] ILIOUSHINE – *Plasticité, déformations élastico-plastiques.* Eyrolles 1956.

[93] VALID R. – *Sur le calcul des coques hors du domaine élastique.* N.T. O.N.E.R.A. nº 102 (1966).

[94] VALID R. – *Une théorie des poutres hors du domaine élastique par l'approximation des milieux curvilignes.* Article O.N.E.R.A. à paraître.

[95] LEMAITRE J. – *Calcul des déformations de fluage d'un cylindre soumis à un chargement complexe variable.* TP O.N.E.R.A. nº 846. *Creep deformation of a cylinder under complex varying loading.* Second IUTAM Symposium on creep in structures, Göteborg (Sweden), (1970).

[96] JOHNSON A.E. – HENDERSON J. and KHAN B. – *Complex-stress creep relaxation and fracture of metallic alloys.* National Engineering Laboratory, Glasgow (1962).

[97] FINNIE I. and HELLER R. – *Creep of engineering materials.* Mc Graw Hill Book Company, (1959), p. 184

[98] BESSELING J.F. – *Investigation of transient creep in thick-walled tubes under axially symmetric loading.* IUTAM Colloquium, Stanford Proc. Berlin, Springer (1962), p. 174.

[99] ROSENGREEN G. – *Primary creep in cylindrical pressure vessels.* IASS Symposium, Warszawa Proc. (1964).

[100] HULT J. – *Primary creep in thick walled spherical shells.* Transactions of chalmers Univ. of Technology, Gothenburg, Suède (1963).

[101] LEE S.D. – *Primary creep in a spherical pressure vessel with varying temperature.* Transactions of chalmers Univ. of Technology, Gothenburg, Suède (1964).

[102] CHABOCHE J.L. – *Programme de calcul des déformations de fluage d'un cylindre soumis à un chargement complexe variable.* Document non publié (1970).

[103] CABARAT R. – *Mesure des constantes élastiques des matériaux par un procédé acoustique.* C.R. Ac. des Sc. de Paris, t. 217 (1943), p. 529.

[104] VINH N.P. – *Vibrations stationnaires et non stationnaires des corps visco-élastiques. Détermination des modules complexes.* La Rhéologie, Masson (1969).

[105] VIDAL G. et GIRARD F. – *Sur une nouvelle méthode de mesure du coefficient de POISSON des métaux et alliages.* C.R. Ac. des Sc. de Paris, t. 242 (1959), p. 1286.

[106] PLÉNARD E. – *Considérations sur le comportement élastique des fontes grises en fonction de leur structure.* Thèse Ing-Doct., Paris (1958).

[107] GIRARD F. – *Nouvelle méthode de mesure du coefficient de POISSON.* Rech. Aérosp. nº 72 (1959).

[108] MARIN J. – *Mechanical properties of engineering materials macroscopic behaviour.* Mater Sc. Res. I Proc. Plenum press (1963), p. 253.

[109] BARROIS W. – *Le fluage des métaux dans les cellules d'avions. Etude préliminaire de la représentation et de l'extrapolation des essais sur éprouvette.* Doc. Air Espace nº 84 (1964), p. 33.

[110] VAN LEEUWEN H.P. – *Predicting material behaviour under load time and temperature conditions.* Report AGARD nº 513 (1965).

[111] LEVY J.C. and BARODY I.I. – *A comparative study of extrapolation methods for creep data at small strains.* Ministry of Aviation. Sand T. Memo 6/66 (1966).

[112] BERRY D.A. – *The acceleration and interpretation of tests on aircraft sturctures when creep occurs.* Ministry of Aviation, R.A.E., 7e Congrès aéronautique international, Le Bourget (1965).

[113] LARSON F.R. and MILLER J. – *A time-temperature relationships for rupture and creep stresses.* Transaction ASME vol. 174 nº 5 (1952).

[114] WALLES K.F.A. and GRAHAM A. – *On the extrapolation and scatter of creep data.* Ministry of Aviation. Aeronautical research council, CP nº 680 (1963).

[115] LEMAITRE J. – *Principe d'une méthode d'obtention des caractéristiques de fluage à long terme à partir d'essais de relaxation de courte durée.* TP O.N.E.R.A. nº 639 (1968). *Basis of a method for investigation of long time creep characteristics through short time relaxation tests.* 5th International congress on Rheology, Kyoto (Japan), (1968).

[116] DAVIS E.A. – *Creep and relaxation of oxygen-free copper.* Journal of Applied Mechanics, vol. 10 nº 2 (1943).

[117] HANSEN T.C. – *Estimating stress relaxation from creep data.* Material research and standard, tome 4 nº 1 (1964).

[118] QUASS S.T. – *A simple graphical analysis of creep and relaxation in nimonic alloys.* Journal of the Institute of Metals, vol. 96 (1968).

[119] MARTINOD H. – RENON C. et CALVET J. – *Fluage de longue durée de l'alliage AU2GN.* Mémoires scientifiques de la Revue de Métallurgie, tome LXVI nº 4 (1969).

[120] LEMAITRE J. – LABOURDETTE R et MONTHULET A. – *Organisation de la mesure et du dépouillement automatiques de phénomènes lentement évolutifs par une chaîne de mesures numériques et traitement sur ordinateur.* N.T. O.N.E.R.A. nº 5/1273 RN (1969).

[121] LEMAITRE J. et BAUDIN G. – *Un appareil destiné à la mesure directe des déformations permanentes.* Rech. Aérosp. nº 128 (1969).

[122] CHALEAT R. et OUDET M. – *Machine de traction de haute précision.* Rapport DGRST nº 65 FR 057 (1967).

[123] CHAGNEAU A. – *Etude de la relaxation d'un fil d'acier à partir de la mesure de sa fréquence de vibration transversale.* Bulletin RILEM nº 3 (1959).

[124] DEVACHT A. – *Balance multicomposantes à jauges extensométriques.* Rech. Aéron., nº 52 (1956).

[125] LEMAITRE J., POLICELLA H., BAUDIN G. et MONTHULET A. – *Appareil pour l'exécution d'essais de relaxation.* Brevet O.N.E.R.A. Nº 70/21445 (1970) –

[126] LEVY J.C. and BARODY I.I. – *A set of creep curves from a single test using a tapered specimen.* Journal of Mechanical Engineering Science, vol. 6 nº 3 (1964).

[126] NAGHDI M. – ESSENBURG F. and KOFF W. – *An experimental study of initial and subsequent yield surfaces in plasticity.* J.A.M. (june 1958), p. 201-209.

[127] PHILLIPS A. and GRAY G.A. – *Experimental determination of corners in the yield surface.* O.N.R., NR 904 415, TR, nº 5 (dec. 1958).

[129] PUGH H.D. –MAIR W.M. and RAPIER A. – *An apparatus for combined-stress testing in the plastic range.* Experimental Mechanics (oct. 1964), p. 281-288.

[130] MANDEL J. – HABIB P. et BUI H.D. – *Essais de traction-torsion sur tubes et fils métalliques.* Ecole Polytechnique, Paris (1962).

[131] Mc COMB H.G. – *Some experiments concerning subsequent yield surfaces.* NASA TN, D 396 (june 1960).

[132] FINDLEY W.N. and GJELSVIK A. – *A versatile bi-axial testing machine for investigation of plasticity, creep or relaxation of materials under variable loading paths.* Brown University, Division of Engineering (August 1961).

[133] LEMAITRE J. – EHRET J. – POLICELLA H. et RIVIERE C. – *Une machine d'essais en traction-torsion-compression.* Revue Française de Mécanique nº 28 (1968).

[134] GASSNER E. – HAIBACH E. and BUXBAUM O. – *Gegenwartiger stand und künftige Ziel der Betriebsfestigkeits.* Forshung LBF (Darmstadt) TB 80 (1968).

[135] CALLADINE C.R. – *A rapid method for estimating the greatest stress in a structure subject to creep.* Brown Univ. TR nº 35.

[136] CALLADINE C.R. – *Creep in torispherical pressure vessel heads.* Second IUTAM Symposium on creep in structures. Göteborg (Suède) (1970).

[137] HOFF N.J. *Approximate analysis of structures in the presence of moderately large creep deformations.* Quaterly of Applied Mathematics, vol. 12 nº 1 (1954).

[138] MARIOTT D.L. – *A review of reference stress methods for estimating creep deformation.* Second IUTAM Symposium on creep in structures, Göteborg (Suède) (1970).

[139] KACHANOV L.M. – *Problems of Continuum Mechanics (contributions in Honor of N.I. Mushlelishvili).* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (1961).

[140] ZYCZKOWSKI M. and SKRZYPEK J. – *Stationary creep and creep rupture of a thick-walled tube under combined loadings.* Second IUTAM Symposium on creep in structures, Göteborg (Suède)(1970).

Achevé d'imprimer à l'O.N.E.R.A., Janvier 1971 - Dépôt légal 1er trimestre 1971 - n° 384.